Les parties A et B sont indépendantes

Alain possède une piscine qui contient $50\ \mathrm{m}^3$ d'eau. On rappelle que $1\ \mathrm{m}^3 = 1{,}000\ \mathrm{L}$.
Pour désinfecter l'eau, il doit ajouter du chlore.
Le taux de chlore dans l'eau, exprimé en $\mathrm{mg} \cdot \mathrm{L}^{-1}$, est défini comme la masse de chlore par unité de volume d'eau. Les piscinistes préconisent un taux de chlore compris entre 1 et $3\,\mathrm{mg} \cdot \mathrm{L}^{-1}$.
Sous l'action du milieu ambiant, notamment des ultraviolets, le chlore se décompose et disparaît peu à peu.
Alain réalise certains jours, à heure fixe, des mesures avec un appareil qui permet une précision à $0,01\,\mathrm{mg} \cdot \mathrm{L}^{-1}$. Le mercredi 19 juin, il mesure un taux de chlore de $0,70\,\mathrm{mg} \cdot \mathrm{L}^{-1}$.

Partie A : étude d'un modèle discret.

Pour maintenir le taux de chlore dans sa piscine, Alain décide, à partir du jeudi 20 juin, d'ajouter chaque jour une quantité de $15\ \mathrm{g}$ de chlore. On admet que ce chlore se mélange uniformément dans l'eau de la piscine.

1. Justifier que cet ajout de chlore fait augmenter le taux de $0,3\,\mathrm{mg} \cdot \mathrm{L}^{-1}$.

2. Pour tout entier naturel n, on note v_n le taux de chlore, en $\mathrm{mg} \cdot \mathrm{L}^{-1}$, obtenu avec ce nouveau protocole n jours après le mercredi 19 juin. Ainsi $v_0 = 0,7$.
   On admet que pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = 0,92 v_n + 0,3.$$

   (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\quad v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4$.
   (b) Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.

3. À long terme, le taux de chlore sera-t-il conforme à la préconisation des piscinistes ? Justifier la réponse.

4. Reproduire et compléter l'algorithme ci-après écrit en langage Python pour que la fonction |alerte$_chlore$| renvoie, lorsqu'il existe, le plus petit entier n tel que $v_n > s$.

```
def alerte_chlore(s) :
    n = 0
    u = 0.7
    while ... :
        n = ...
        u = ...
    return n
```

5. Quelle valeur obtient-on en saisissant l'instruction |alerte$_chlore(3)$| ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B : étude d'un modèle continu.

Alain décide de faire appel à un bureau d'études spécialisées. Celui-ci utilise un modèle continu pour décrire le taux de chlore dans la piscine.

Dans ce modèle, pour une durée x (en jours écoulés à compter du mercredi 19 juin), $f(x)$ représente le taux de chlore, en $\mathrm{mg}\cdot\mathrm{L}^{-1}$, dans la piscine.

On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) : $y' = -0,08y + \dfrac{q}{50}$, où q est la quantité de chlore, en gramme, rajoutée dans la piscine chaque jour.

1. Justifier que la fonction f est de la forme $f(x) = C\mathrm{e}^{-0,08x} + \dfrac{q}{4}$ où C est une constante réelle.

2. (a) Exprimer en fonction de q la limite de f en $+\infty$.

   (b) On rappelle que le taux de chlore observé le mercredi 19 juin est égal à $0,7\,\mathrm{mg}\cdot\mathrm{L}^{-1}$.
   On souhaite que le taux de chlore se stabilise à long terme autour de $2\,\mathrm{mg}\cdot\mathrm{L}^{-1}$. Déterminer les valeurs de C et q afin que ces deux conditions soient respectées.