Exercice BAC 2024 Amérique du Sud - Ex 3

Fonction exponentielle · Intégration · Intégration par parties · Suites définies par intégrales · Calcul d'aire · Limites · Dérivées

Partie 1

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(x^2 - 4\right) \mathrm{e}^{-x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Justifier que pour tout réel x, $f'(x) = \left(-x^2 + 2x + 4\right) \mathrm{e}^{-x}$.
3. En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Partie 2

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \displaystyle\int_{-2}^{0} x^n \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x$.

1. Justifier que $I_0 = \mathrm{e}^2 - 1$.
2. En utilisant une intégration par partie, démontrer l'égalité :

$$I_{n+1} = (-2)^{n+1}\mathrm{e}^2 + (n+1)I_n.$$

3. En déduire les valeurs exactes de I_1 et de I_2.

Partie 3

1. Déterminer le signe sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie dans la partie 1.
2. On a représenté ci-contre la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\, \vec{\imath},\, \vec{\jmath}\right)$.

   Le domaine D du plan hachuré ci-contre est délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

   Calculer la valeur exacte, en unité d'aire, de l'aire S du domaine D.