Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A

Une société de vente en ligne procède à une étude du niveau de fidélité de ses clients. Elle définit pour cela comme régulier un client qui a fait des achats chaque année depuis trois ans.

Elle constate que 60 % de ses clients sont des clients réguliers, et que parmi eux, 47 % ont acheté la carte de fidélité.

Par ailleurs, parmi l'ensemble de tous les clients de la société, 38 % ont acheté la carte de fidélité.

On interroge au hasard un client et on considère les évènements suivants:

- R : le client est un client régulier ;
- F : le client a acheté la carte de fidélité .

Pour un évènement E quelconque, on note $\overline{E}$ son évènement contraire et $P(E)$ sa probabilité.

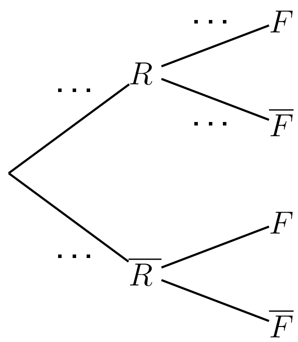
1. (a) Reproduire l'arbre ci-contre et compléter les pointillés.

   (b) Calculer la probabilité que le client interrogé soit un client régulier et qu'il ait acheté la carte de fidélité.

   (c) Déterminer la probabilité que le client ait acheté la carte de fidélité sachant que ce n'est pas un client régulier.

   (d) Le directeur du service des ventes affirme que parmi les clients qui ont acheté la carte de fidélité, plus de 80 % sont des clients réguliers.

   Cette affirmation est-elle exacte? Justifier.



2. On choisit un échantillon de 20 clients de la société sélectionnés de manière indépendante. On suppose que ce choix s'assimile à un tirage avec remise.

   On note X la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 20 clients associe le nombre de clients ayant acheté la carte de fidélité parmi eux. On rappelle que $P(F) = 0,38$.

   Les valeurs des probabilités demandées seront arrondies à 10^{-3} près.

   (a) Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire X ? Justifier.

   (b) Déterminer la probabilité qu'au moins 5 clients aient acheté la carte de fidélité dans un échantillon de 20.

Partie B

La société demande à un institut de sondage de faire une enquête sur le profil de ses clients réguliers. L'institut a élaboré un questionnaire en ligne constitué d'un nombre variable de questions.

On choisit au hasard un échantillon de 1,000 clients réguliers, à qui le questionnaire est proposé. On considère que ces 1,000 clients répondent.

- Pour les remercier, la société offre un bon d'achat à chacun des clients de l'échantillon. Le montant de ce bon d'achat dépend du nombre de questions posées au client.

- La société souhaite récompenser particulièrement les clients de l'échantillon qui ont acheté une carte de fidélité et, en plus du bon d'achat, offre à chacun d'eux une prime d'un montant de 50 euros versée sur la carte de fidélité.

On note Y_1 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1,000 clients réguliers, associe le total, en euros, des montants du bon d'achat des 1000 clients.

On admet que son espérance $E\left(Y_1\right)$ est égale à 30,000 et que sa variance $V\left(Y_1\right)$ est égale à 100,000.

On note X_2 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1,000 clients réguliers, associe le nombre de clients ayant acheté la carte de fidélité parmi eux, et on note Y_2 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1,000 clients, associe le total, en euros, des montants de la prime de fidélité versée.

On admet que X_2 suit la loi binomiale de paramètres 1,000 et 0,47 et que $Y_2 = 50X_2$.

1. Calculer l'espérance $E\left(X_2\right)$ de la variable X_2 et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

On note $Y = Y_1 + Y_2$ la variable aléatoire égale au total général, en euros, des montants offerts (bon d'achat et prime de fidélité) aux 1,000 clients. On admet que les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont indépendantes.

On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{Y}{1{,}000}$.

2. Préciser ce que modélise la variable Z dans le contexte de l'exercice.

   Vérifier que son espérance $E(Z)$ est égale à $53,5$ et que sa variance $V(Z)$ est égale à 0.722,75.

3. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, vérifier que la probabilité que Z soit strictement compris entre $51,7$ euros et $55,3$ euros est supérieure à $0,75$.