Dans un repère orthonormé $\left(\text{O}\ ;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ de l'espace, on considère le plan (P) d'équation:

$$(P) : \quad 2x + 2y - 3z + 1 = 0.$$

On considère les trois points A, B et C de coordonnées:

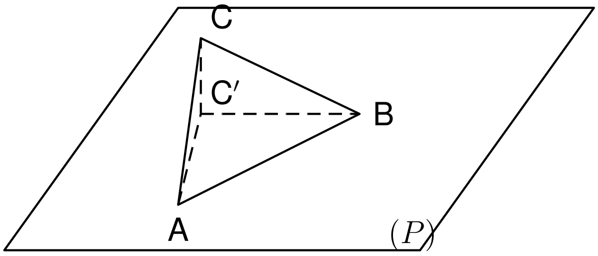
$$\text{A}(1\ ;\ 0\ ;\ 1)\ ,\ \text{B}(2\ ;\ -1\ ;\ 1)\ \text{et}\ \text{C}(-4\ ;\ -6\ ;\ 5)\ .$$

Le but de cet exercice est d'étudier le rapport des aires entre un triangle et son projeté orthogonal dans un plan.

Partie A

1. Pour chacun des points A, B et C, vérifier s'il appartient au plan (P).
2. Montrer que le point C′$(0\ ;\ -2\ ;\ -1)$ est le projeté orthogonal du point C sur le plan (P).
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
4. On admet l'existence d'un unique point H vérifiant les deux conditions
   $\begin{cases} \text{H} \in (\text{AB}) \\ (\text{AB}) \text{ et } (\text{HC}) \text{ sont orthogonales.} \end{cases}$

   Déterminer les coordonnées du point H.



Partie B

On admet que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\text{HC}}$ sont : $\overrightarrow{\text{HC}}\begin{pmatrix} -\frac{11}{2} \\ -\frac{11}{2} \\ 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la valeur exacte de $\left\|\overrightarrow{\text{HC}}\right\|$.
2. Soit S l'aire du triangle ABC. Déterminer la valeur exacte de S.

Partie C

On admet que HC′ $= \sqrt{\dfrac{17}{2}}$.

1. Soit $\alpha = \widehat{\text{CHC}'}$. Déterminer la valeur de $\cos(\alpha)$.
2. (a) Montrer que les droites (C′H) et (AB) sont perpendiculaires.
   (b) Calculer S' l'aire du triangle ABC′, on donnera la valeur exacte.
   (c) Donner une relation entre S, S' et $\cos(\alpha)$.