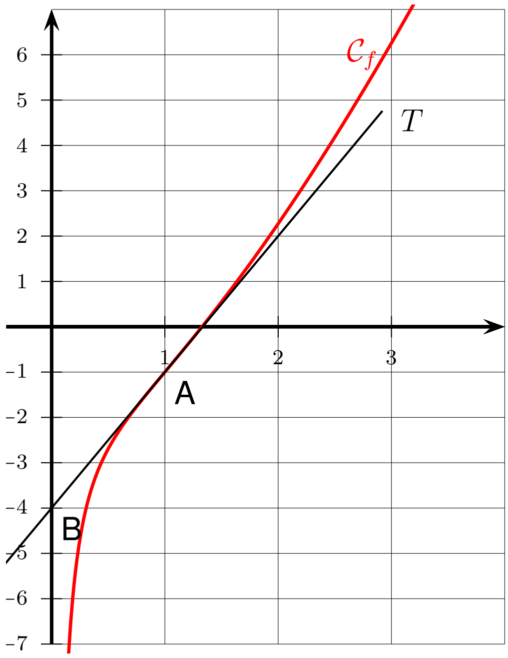
Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln\left(x^2\right) - \frac{1}{x}.$$

Partie A : lectures graphiques

On a tracé ci-dessous la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ de la fonction f, ainsi que la droite (T), tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point A de coordonnées $(1\ ;\ -1)$.

Cette tangente passe également par le point B$(0\ ;\ -4)$.



1. Lire graphiquement $f'(1)$ et donner l'équation réduite de la tangente (T).
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.
   Que semble représenter le point A pour la courbe $(\mathcal{C}_f)$?

Partie B : étude analytique

1. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$, puis sa limite en 0.
2. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   (a) Déterminer $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   (b) Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$,
   $$f''(x) = \frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}.$$
3. (a) Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

(b) Étudier les variations de la fonction f', puis le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

4. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   (b) Donner la valeur arrondie au centième de α et montrer que α vérifie :

$$\alpha^2 = \exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right).$$