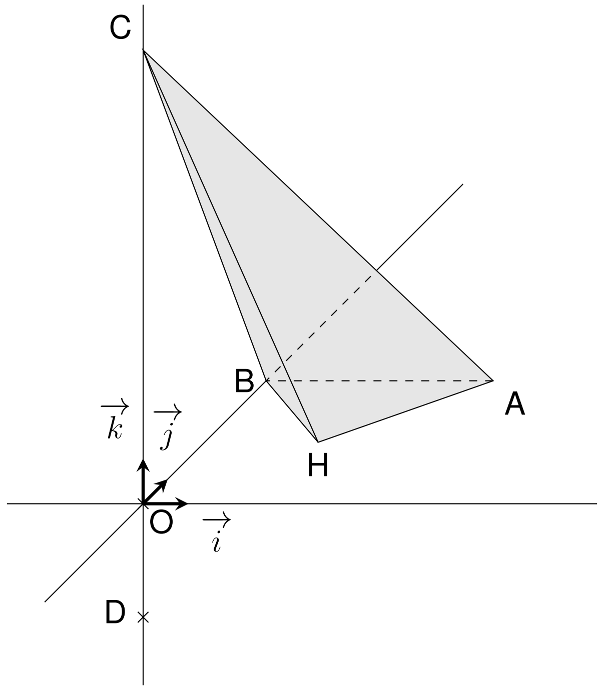
L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.

On considère les points A$(5\,;\,5\,;\,0)$, B$(0\,;\,5\,;\,0)$, C$(0\,;\,0\,;\,10)$ et D$\left(0\,;\,0\,;\,-\frac{5}{2}\right)$.



1. (a) Montrer que $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (CAD).
   (b) En déduire que le plan (CAD) a pour équation cartésienne : $x - y = 0$.

2. On considère la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = \frac{5}{2}t \\ y = 5 - \frac{5}{2}t \\ z = 0 \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.
   (a) On admet que la droite $\mathcal{D}$ et le plan (CAD) sont sécants en un point H. Justifier que les coordonnées de H sont $\left(\frac{5}{2}\,;\,\frac{5}{2}\,;\,0\right)$.
   (b) Démontrer que le point H est le projeté orthogonal de B sur le plan (CAD).

3. (a) Démontrer que le triangle ABH est rectangle en H.
   (b) En déduire que l'aire du triangle ABH est égale à $\frac{25}{4}$.

4. (a) Démontrer que (CO) est la hauteur du tétraèdre ABCH issue de C.
   (b) En déduire le volume du tétraèdre ABCH.
   On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \frac{1}{3}\mathcal{B}h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

5. On admet que le triangle ABC est rectangle en B. Déduire des questions précédentes la distance du point H au plan (ABC).