L'exercice est constitué de deux parties indépendantes.

Partie 1

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on désigne par f_n la fonction définie sur $[0\ ;\ 1]$ par :

$$f_n(x) = x^n \mathrm{e}^x$$

On note C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ du plan.
On désigne par (I_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par :

$$I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x.$$

1. (a) On désigne par F_1 la fonction définie sur $[0;1]$ par :

$$F_1(x) = (x-1)\mathrm{e}^x.$$

   Vérifier que F_1 est une primitive de la fonction f_1.

   (b) Calculer I_1.

2. À l'aide d'une intégration par parties, établir la relation pour tout n supérieur ou égal à 1 ,

$$I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)I_n.$$

3. Calculer I_2.

4. On considère la fonction `mystere` écrite dans le langage Python :

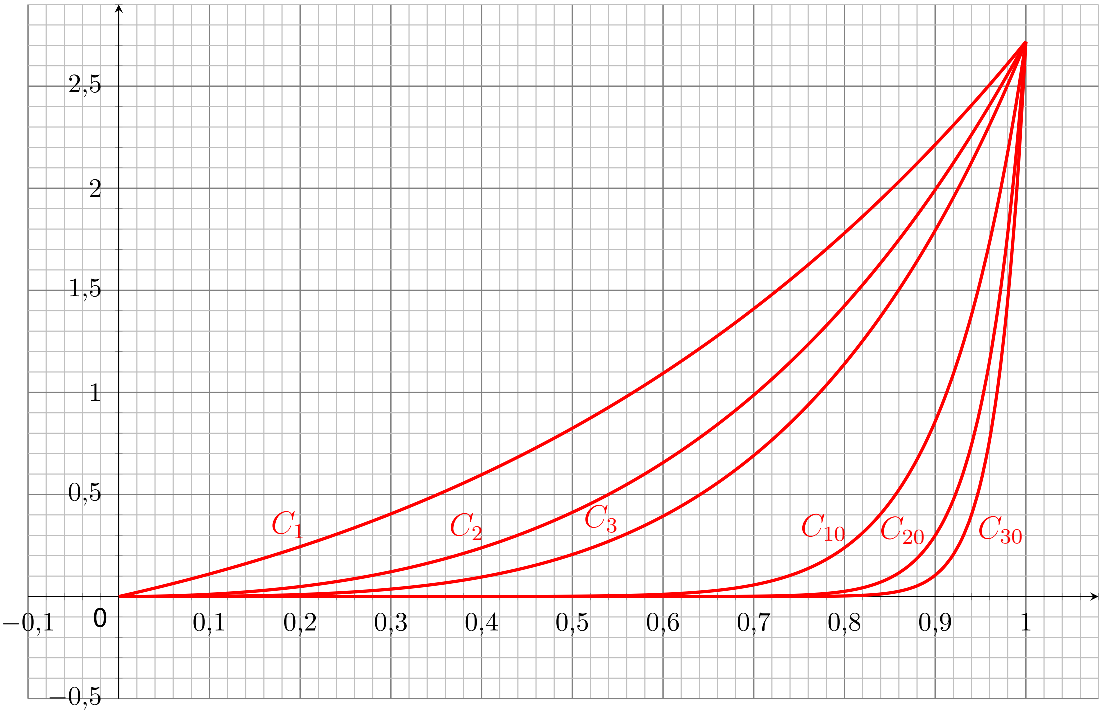
```
from math import e # la constante d'Euler e

def mystere(n):
  a = 1
  L = [a]
  for i in range(1,n):
    a = e - (i + 1)*a
    L.append(a)
  return L
```

   À l'aide des questions précédentes, expliquer ce que renvoie l'appel `mystere(5)`.

Partie 2

1. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les courbes $C_1, C_2, C_3, C_{10}, C_{20}$ et C_{30}.



(a) Donner une interprétation graphique de I_n.

(b) Quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la suite (I_n) ?

2. Montrer que pour tout n supérieur ou égal à 1,

$$0 \leqslant I_n \leqslant \mathrm{e}\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x.$$

3. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.