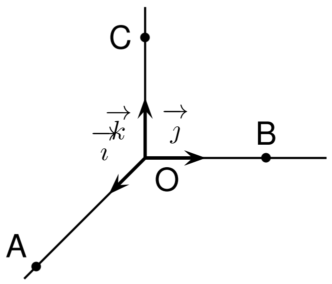
L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k}\right)$.
On considère les trois points A(3 ; 0 ; 0), B(0 ; 2 ; 0) et C(0 ; 0 ; 2).



L'objectif de cet exercice est de démontrer la propriété suivante :
Le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des trois autres faces du tétraèdre OABC ,

Partie 1 : Distance du point O au plan (ABC)

1. Démontrer que le vecteur $\vec{n}\,(2\ ;\ 3\ ;\ 3)$ est normal au plan (ABC).
2. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x + 3y + 3z - 6 = 0$.
3. Donner une représentation paramétrique de la droite d passant par O et de vecteur directeur $\vec{n}$.
4. On note H le point d'intersection de la droite d et du plan (ABC).
   Déterminer les coordonnées du point H.
5. En déduire que la distance du point O au plan (ABC) est égale à $\dfrac{3\sqrt{22}}{11}$

Partie 2 : Démonstration de la propriété

1. Démontrer que le volume du tétraèdre OABC est égal à 2.
2. En déduire que l'aire du triangle ABC est égale à $\sqrt{22}$.
3. Démontrer que pour le tétraèdre OABC, le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des trois autres faces du tétraèdre .
   On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V = \dfrac{1}{3}B \times h$ où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h est la hauteur relative à cette base.