PARTIE A

On considère l'équation différentielle

$$(E): \quad y' + \frac{1}{4}y = 20\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x},$$

d'inconnue y, fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

1. Déterminer la valeur du réel a tel que la fonction g définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = ax\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (E).
2. On considère l'équation différentielle

   $$(E'): \quad y' + \frac{1}{4}y = 0,$$

   d'inconnue y, fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

   Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E').
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) telle que $f(0) = 8$.

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = (20x + 8)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. De plus, on admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

1. (a) Justifier que, pour tout réel x positif,

   $$f'(x) = (18 - 5x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}.$$

   (b) En déduire le tableau de variations de la fonction f. On précisera la valeur exacte du maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
2. Dans cette question on s'intéresse à l'équation $f(x) = 8$.

   (a) Justifier que l'équation $f(x) = 8$ admet une unique solution, notée α, dans l'intervalle [14 ; 15].

   (b) Recopier et compléter le tableau ci-dessous en faisant tourner étape par étape la fonction solution_equation ci-contre, écrite en langage Python

a	14				
b	15				
$b - a$	1				
m	14,5				
Condition $f(m) > 8$	FAUX				

```python
from math import exp
def f(x):
    return (20*x+8)*exp(-1/4*x)

def solution_equation():
    a,b = 14,15
    while b-a > 0.1 :
        m = (a+b)/2
        if f(m) > 8:
            a = m
        else:
            b = m
    return a,b
```

(c) Quel est l'objectif de la fonction solution_equation dans le contexte de la question ?