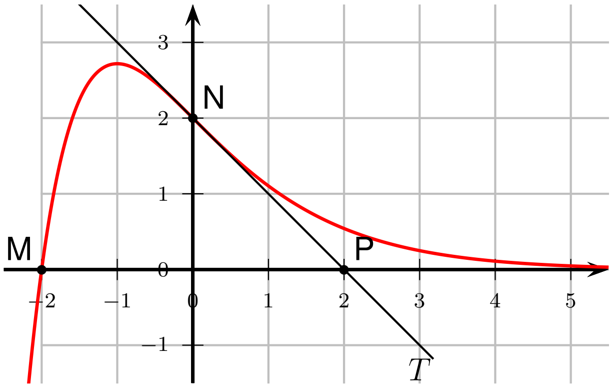
Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa dérivée seconde.

Dans le repère orthonormé ci-dessous ont été représentés :

- la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f ;
- la tangente T à $\mathcal{C}_f$ en son point N(0 ; 2);
- le point M$(-2\ ;\ 0)$ appartenant à $\mathcal{C}_f$ et P(2 ; 0) appartenant à la tangente T.

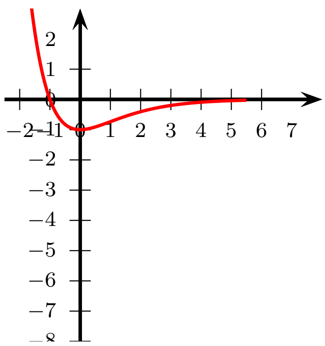
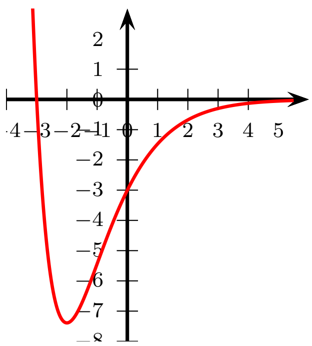
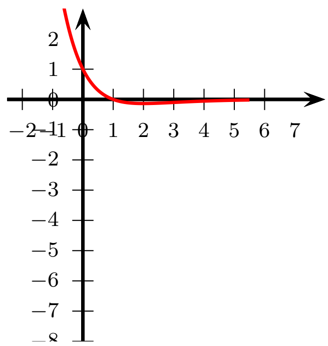
On précise que la fonction f est strictement positive sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et qu'elle est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ -1]$.



Partie A : étude graphique

On répondra aux questions suivantes en utilisant le graphique.

1. (a) Donner $f(0)$.
   (b) Déterminer $f'(0)$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
3. La fonction f est-elle convexe sur $\mathbb{R}$? Justifier.
4. Parmi les courbes suivantes, indiquer laquelle peut représenter une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Justifier.

Courbe 1	Courbe 2	Courbe 3
		

Partie B : recherche d'une expression algébrique

On admet que la fonction f est de la forme

$$f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{\lambda x},$$

où a, b et λ sont des constantes réelles.
Pour répondre aux questions suivantes, on utilisera les résultats de la partie A.

1. Justifier que $b = 2$.
2. Justifier que $-2a + b = 0$ puis en déduire la valeur de a.
3. Déterminer une expression algébrique de f. Justifier.

Partie C : étude algébrique

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. On admet que $f'(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$. Dresser le tableau de variations complet de f. Justifier.
3. (a) Étudier la convexité de f.
   (b) Préciser les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.
4. Pour tout nombre réel $t \geqslant 0$, on pose:

$$I(t) = \int_{-2}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

   (a) En utilisant une intégration par parties, montrer que:

$$I(t) = (-t-3)\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^2.$$

   (b) En déduire un exemple de surface non limitée dont l'aire est finie.