Exercice BAC 2024 Centres Étrangers - Ex 4

Géométrie dans l'espace | Vecteurs | Équation cartésienne de plan | Représentation paramétrique de droite | Intersection | Projeté orthogonal

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O} \,;\, \vec{\imath},\, \vec{\jmath},\, \vec{k}\right)$.
On considère :

- les points A$(-2\,;\,0\,;\,2)$, B$(-1\,;\,3\,;\,0)$, C$(1\,;\,-1\,;\,2)$ et D(0 ; 0 ; 3).
- la droite $\mathcal{D}_1$ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 3+5t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.
- la droite $\mathcal{D}_2$ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 1+3s \\ y = -1-5s \\ z = 2-6s \end{cases}$ avec $s \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. (a) Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC).

   (b) Justifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :
   $$x+3y+5z-8=0.$$

   (c) En déduire que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
3. (a) Justifier que la droite $\mathcal{D}_1$ est la hauteur du tétraèdre ABCD issue de D.
   On admet que la droite $\mathcal{D}_2$ est la hauteur du tétraèdre ABCD issue de C.

   (b) Démontrer que les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.
4. (a) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point D sur le plan (ABC).

   (b) Calculer la distance du point D au plan (ABC).
   Arrondir le résultat au centième.