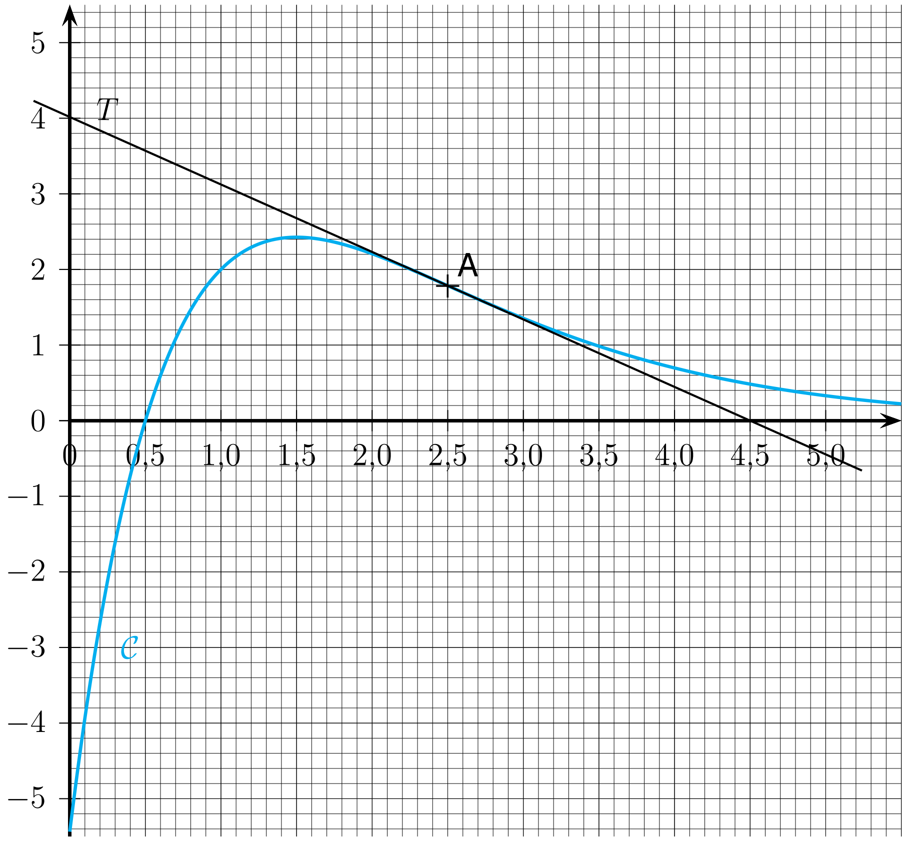
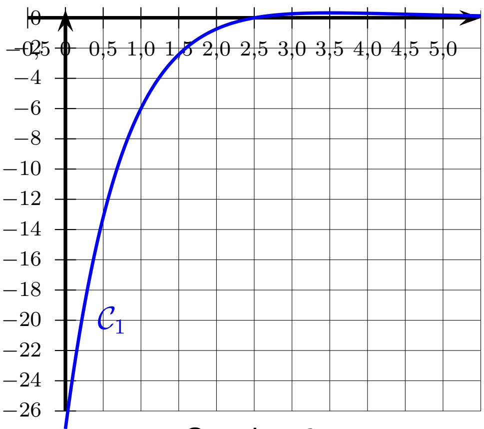
Partie A

On considère une fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$, représentée par la courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous.

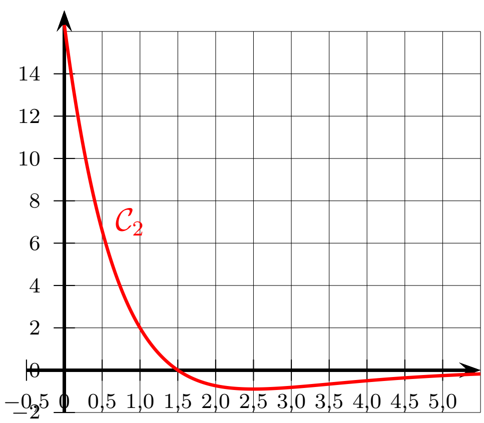
La droite T est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse $\frac{5}{2}$.



1. Dresser, par lecture graphique, le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 5].
2. Que semble présenter la courbe $\mathcal{C}$ au point A ?
3. La dérivée f' et la dérivée seconde f'' de la fonction f sont représentées par les courbes ci-dessous.
   Associer à chacune de ces deux fonctions la courbe qui la représente.
   Ce choix sera justifié.

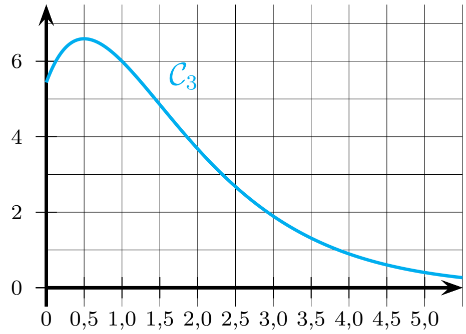


Courbe $\mathcal{C}_1$



Courbe $\mathcal{C}_2$

4. La courbe $\mathcal{C}_3$ ci-contre peut-elle être la représentation graphique sur $[0\ ;\ +\infty[$ d'une primitive de la fonction f ? Justifier.



Partie B

Dans cette partie, on considère que la fonction f, définie et deux fois dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$, est définie par

$$f(x) = (4x-2)\mathrm{e}^{-x+1}.$$

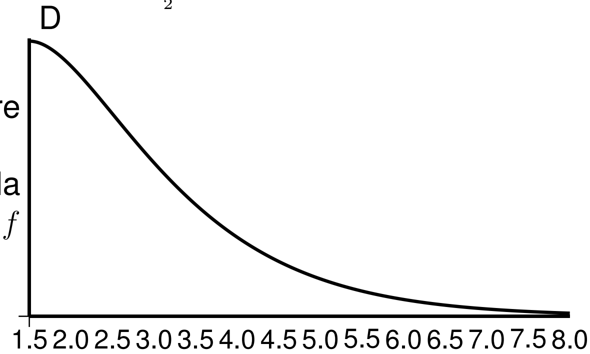
On notera respectivement f' et f'' la dérivée et la dérivée seconde de la fonction f.

1. Étude de la fonction f
   (a) Montrer que $f'(x) = (-4x+6)\mathrm{e}^{-x+1}$.
   (b) Utiliser ce résultat pour déterminer le tableau complet des variations de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
   (c) Étudier la convexité de la fonction f et préciser l'abscisse d'un éventuel point d'inflexion de la courbe représentative de f.

2. On considère une fonction F définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x+1}$, où a et b sont deux nombres réels.
   (a) Déterminer les valeurs des réels a et b telles que la fonction F soit une primitive de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   (b) On admet que $F(x) = (-4x-2)\mathrm{e}^{-x+1}$ est une primitive de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   En déduire la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près, de l'intégrale

$$I = \int_{\frac{3}{2}}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. Une municipalité a décidé de construire une piste de trottinette freestyle.
   Le profil de cette piste est donné par la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $\left[\frac{3}{2}\ ;\ 8\right]$.
   L'unité de longueur est le mètre.



   (a) Donner une valeur approchée au cm près de la hauteur du point de départ D.

(b) La municipalité a organisé un concours de graffiti pour orner le mur de profil de la piste. L'artiste retenue prévoit de couvrir environ 75 % de la surface du mur.
Sachant qu'une bombe aérosol de 150 mL permet de couvrir une surface de $0,8$ m^2, déterminer le nombre de bombes qu'elle devra utiliser pour réaliser cette uvre.