L'exercice est constitué de deux parties indépendantes.

Partie 1

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y' + y = \mathrm{e}^{-x}$$

1. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.
   Vérifier que la fonction u est une solution de l'équation différentielle (E).
2. On considère l'équation différentielle $(E') : y' + y = 0$.
   Résoudre l'équation différentielle (E') sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.

Partie 2

Dans cette partie, k est un nombre réel fixé que l'on cherche à déterminer.
On considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = (x + k)\mathrm{e}^{-x}.$$

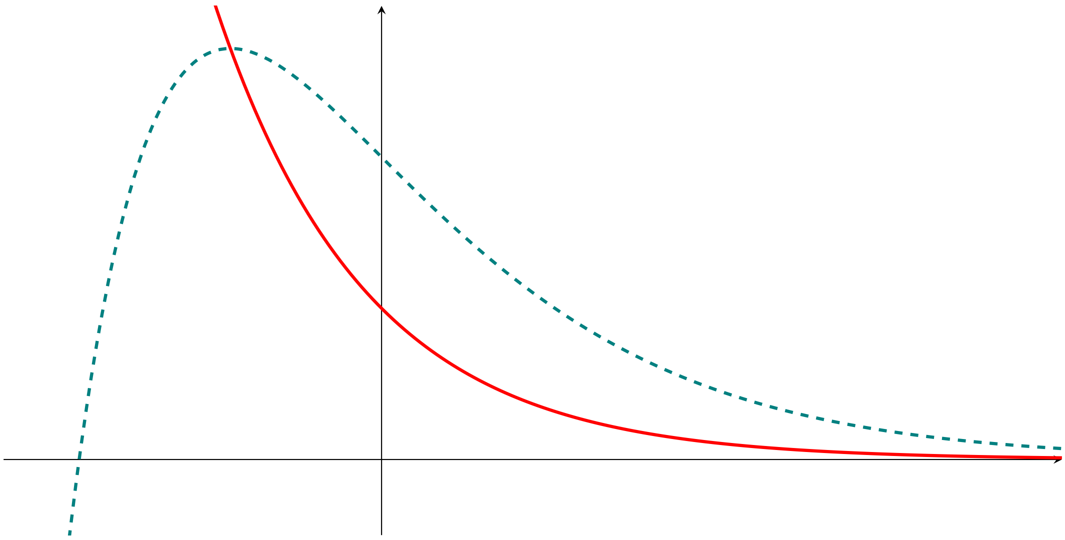
Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

On note C_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthogonal et C la courbe représentative de la fonction h.

On a représenté sur le graphique en fin d'exercice les courbes C_k et C sans indiquer les unités sur les axes ni le nom des courbes.

1. Sur le graphique en fin d'exercice à rendre avec la copie, l'une des courbes est en traits pointillés, l'autre est en trait plein. Laquelle est la courbe C ?
2. En expliquant la démarche utilisée, déterminer la valeur du nombre réel k et placer sur le graphique ci-dessous avec la copie l'unité sur chacun des axes du graphique.



COOPMATHS CC BY SA

MathALÉA