On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x-1}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$.
On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. (a) Déterminer la limite de la fonction f en 1.
   (b) En déduire une interprétation graphique.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
3. (a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$, on a

$$f'(x) = \frac{(x-2)\mathrm{e}^x}{(x-1)^2}.$$

   (b) Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$.
4. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $]]-\infty\ ;\ 1[$, on a

$$f''(x) = \frac{\left(x^2-4x+5\right)\mathrm{e}^x}{(x-1)^3}.$$

   (a) Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$.
   (b) Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
   (c) En déduire que, pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$, on a :

$$\mathrm{e}^x \geqslant (-2x-1)(x-1).$$

5. (a) Justifier que l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$.
   (b) À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.