L'objectif de cet exercice est de déterminer la distance entre deux droites non coplanaires.

Par définition, la distance entre deux droites non coplanaires de l'espace, (d_1) et (d_2) est la longueur du segment [EF], où E et F sont des points appartenant respectivement à (d_1) et à (d_2) tels que la droite (EF) est orthogonale à (d_1) et (d_2).

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

Soit (d_1) la droite passant par A$(1 ; 2 ; -1)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et (d_2) la droite dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ y & = & 1+t \\ z & = & 2+t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$.

1. Donner une représentation paramétrique de la droite (d_1)

2. Démontrer que les droites (d_1) et (d_2) sont non coplanaires.

3. Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par A et dirigé par les vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u_1}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

   Justifier qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est : $-2x+y+5z+5=0$.

4. (a) Sans chercher à calculer les coordonnées du point d'intersection, justifier que la droite (d_2) et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants.

   (b) On note F le point d'intersection de la droite (d_2) et du plan $\mathcal{P}$.

   Vérifier que le point F a pour coordonnées $\left(0 ; -\dfrac{5}{3} ; -\dfrac{2}{3}\right)$.

Soit (δ) la droite passant par F et de vecteur directeur $\vec{w}$. On admet que les droites (δ) et (d_1) sont sécantes en un point E de coordonnées $\left(-\dfrac{2}{3} ; -\dfrac{4}{3} ; -1\right)$.

5. (a) Justifier que la distance EF est la distance entre les droites (d_1) et (d_2).

   (b) Calculer la distance entre les droites (d_1) et (d_2).