

Partie A : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = x - \ln(x^2 + 1),$$

où \ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. On admet que f est dérivable sur \mathbb{R} et on note f' sa fonction dérivée.

(a) Montrer que pour tout nombre réel x , on a :

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}.$$

(b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur \mathbb{R} .

2. Montrer que pour tout nombre réel $x > 0$, on a :

$$f(x) = x - 2\ln(x) - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right).$$

3. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Partie B : étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = f(u_n) = u_n - \ln(u_n^2 + 1) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel $n : u_n \geq 0$.

2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

3. En déduire la convergence de la suite (u_n) .

4. On note ℓ la limite de la suite (u_n) . Déterminer la valeur de ℓ .

5. (a) Recopier et compléter le script ci-dessous écrit en langage Python afin qu'il renvoie la plus petite valeur de l'entier n à partir de laquelle $u_n \leq h$, où h est un nombre réel strictement positif.

```
from math import log as ln
#permet d'utiliser la fonction ln
#Le Logarithme népérien

def seuil(h):
    n = 0
    u = 7
    while ...:
        n = n+1
        u = ...
    return n
```

- (b) Déterminer la valeur renvoyée lorsqu'on saisit `seuil(0.01)` dans la console Python. Justifier la réponse.

Partie C : calcul intégral

- Étudier le signe de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$.
- Interpréter graphiquement l'intégrale:

$$I = \int_2^4 f(x) \, dx.$$

- On admet dans cette question que, pour tout nombre réel $x \in [2 ; 4]$, on a l'encadrement:

$$0,5x - 1 \leq f(x) \leq 0,25x + 0,25.$$

En déduire l'encadrement :

$$1 \leq I \leq 2.$$