Exercice 1

7 points

Partie A X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(20\,;\,0{,}2)$ et $Y = 5X - 2$.

1) $P(X=2) = \binom{20}{2} \times 0{,}2^2 \times 0{,}8^{18}$ et $\binom{20}{2} = \dfrac{20\times 19}{2} = 190$, donc $P(X=2) = 190 \times 0{,}2^2 \times 0{,}8^{18}$: réponse b.
(À la calculatrice, $P(X=2) \approx 0{,}137$; la proposition f., $0{,}206$, est une valeur approchée de $P(X \leqslant 2)$.)

2) $V(X) = n\,p\,(1-p) = 20 \times 0{,}2 \times 0{,}8 = 3{,}2$: réponse b.
(Attention : $\sqrt{3{,}2}$ est l'écart-type $\sigma(X)$, pas la variance.)

3) $E(X) = n\,p = 20 \times 0{,}2 = 4$. Par linéarité de l'espérance, $E(Y) = 5\,E(X) - 2 = 5 \times 4 - 2 = 18$: réponse d.

4) X ne prend que des valeurs entières, donc $\{3 \leqslant X \leqslant 7\} = \{X \leqslant 7\}$ privé de $\{X \leqslant 2\}$:

$$P(3 \leqslant X \leqslant 7) = P(X \leqslant 7) - P(X \leqslant 2) : \quad \text{réponse b.}$$

(La proposition a. retire aussi $P(X=3)$; la proposition e. garde $P(X=2)$.)

5) $V(aX+b) = a^2\,V(X)$, donc $V(Y) = 5^2 \times V(X) = 25 \times 3{,}2 = 80$: réponse c.

Partie B $g(x) = x^3 - 6x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$.

1) Pour $x \neq 0$, $g(x) = x^3\left(1 - \dfrac{6}{x} + \dfrac{1}{x^3}\right)$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et la parenthèse tend vers 1, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$: réponse b.

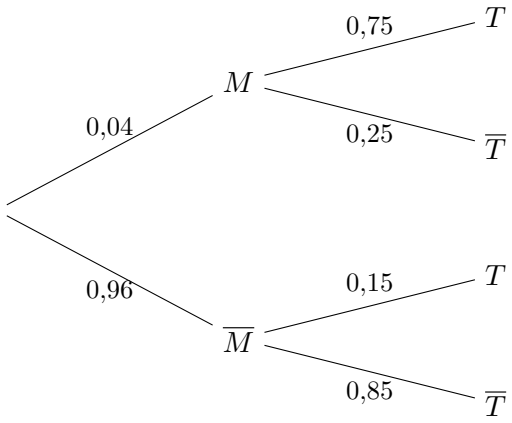
2) $g'(x) = 3x^2 - 12x$ et $g''(x) = 6x - 12$. g'' s'annule en changeant de signe en $x = 2$ (négative avant, positive après) : la courbe admet un point d'inflexion d'abscisse 2, et $g(2) = 8 - 24 + 1 = -15$.
Le point d'inflexion est $C(2\,;\,-15)$: réponse c.

Exercice 2

12 points

Partie A

1) D'après l'énoncé : $P(M) = 0{,}04$, $P_M(T) = 0{,}75$ et $P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0{,}85$, donc $P_{\overline{M}}(T) = 0{,}15$.



2) **a.** $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0{,}04 \times 0{,}75 = \boxed{0{,}03}$.

b. M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(T) = P(M \cap T) + P\left(\overline{M} \cap T\right) = 0{,}03 + 0{,}96 \times 0{,}15 = 0{,}03 + 0{,}144 = \boxed{0{,}174}.$$

3) On cherche $P_T(M)$:

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}03}{0{,}174} = \frac{5}{29} \approx \boxed{0{,}17}.$$

Une truite au test positif n'est porteuse de la maladie que dans environ $17\,\%$ des cas.

Partie B

1) On répète 10 fois, de façon identique et indépendante (tirages assimilés à des tirages avec remise), une épreuve de Bernoulli dont le succès « le test est positif » a pour probabilité $p = P(T) = 0{,}174$. X compte le nombre de succès, donc X suit la loi binomiale

$$\boxed{\mathcal{B}(n = 10\,;\, p = 0{,}174)}.$$

2) $E(X) = n\,p = 10 \times 0{,}174 = \boxed{1{,}74}$.
Sur un grand nombre de séries de 10 truites testées, il y a en moyenne $1{,}74$ truite au test positif par série.

3) $P(X = 2) = \binom{10}{2} \times 0{,}174^2 \times 0{,}826^8 = 45 \times 0{,}174^2 \times 0{,}826^8 \approx \boxed{0{,}295}$.

4) On passe par l'événement contraire :

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 2) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - 0{,}826^{10} - 10 \times 0{,}174 \times 0{,}826^9 \\ &\approx 1 - 0{,}147\,8 - 0{,}311\,4 \approx \boxed{0{,}541}. \end{aligned}$$

5) À la calculatrice (fonction de répartition de la loi binomiale) : $P(X \leqslant 3) \approx \boxed{0{,}920}$.
(Détail : $P(X \leqslant 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) \approx 0{,}147\,8 + 0{,}311\,4 + 0{,}295\,2 + 0{,}165\,8$.)

Partie C

1) Notons C le coût par truite testée.

- $C = 15$ quand le test est positif (la truite est soignée) : $P(C=15) = P(T) = 0{,}174$.
- $C = 150$ quand la truite est malade et non dépistée : $P(C=150) = P\left(M \cap \overline{T}\right) = 0{,}04 \times 0{,}25 = 0{,}01$.
- $C = 0$ sinon : $P(C=0) = 1 - 0{,}174 - 0{,}01 = 0{,}816$ (truite saine au test négatif : $0{,}96 \times 0{,}85 = 0{,}816$).

Coût (en euros)	0	15	150
Probabilité	0,816	0,174	0,01

Vérification : $0{,}816 + 0{,}174 + 0{,}01 = 1$.

2) $E(C) = 0 \times 0{,}816 + 15 \times 0{,}174 + 150 \times 0{,}01 = 2{,}61 + 1{,}5 = \boxed{4{,}11 \text{ euros}}$.

3) Pour 200 truites, le coût moyen à prévoir est $200 \times 4{,}11 = \boxed{822 \text{ euros}}$.

Exercice 3

12 points

Partie A $f(x) = \dfrac{3+4x}{4+3x}$ sur $\left]-\dfrac{4}{3}\,;+\infty\right[$.

1) *En* $-\dfrac{4}{3}$. $\lim\limits_{x\to-\frac{4}{3}}(3+4x) = 3 - \dfrac{16}{3} = -\dfrac{7}{3}$ et, pour $x > -\dfrac{4}{3}$, $4+3x > 0$ avec $\lim\limits_{x\to-\frac{4}{3}}(4+3x) = 0^+$. Par quotient :

$$\lim_{\substack{x\to-\frac{4}{3}\\ x>-\frac{4}{3}}} f(x) = \boxed{-\infty}.$$

La droite d'équation $\boxed{x = -\dfrac{4}{3}}$ est asymptote verticale à la courbe.

En $+\infty$. Pour $x > 0$, $f(x) = \dfrac{x\left(\frac{3}{x}+4\right)}{x\left(\frac{4}{x}+3\right)} = \dfrac{\frac{3}{x}+4}{\frac{4}{x}+3}$, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{4}{3}}$.

La droite d'équation $\boxed{y = \dfrac{4}{3}}$ est asymptote horizontale à la courbe en $+\infty$.

2) f est un quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur l'intervalle.

Avec $u(x) = 3 + 4x$, $v(x) = 4 + 3x$:

$$f'(x) = \frac{4(4+3x) - 3(3+4x)}{(4+3x)^2} = \frac{16 + 12x - 9 - 12x}{(4+3x)^2} = \frac{7}{(4+3x)^2}.$$

Pour tout $x > -\frac{4}{3}$, $f'(x) > 0$: f est strictement croissante sur $\left]-\frac{4}{3}\,;\,+\infty\right[$.

x	$-\frac{4}{3}$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	$-\infty$ ↗ $\frac{4}{3}$

Partie B

1) $u_1 = f(3) = \dfrac{3 + 4 \times 3}{4 + 3 \times 3} = \boxed{\dfrac{15}{13}} \approx 1{,}154.$

2) Pour tout entier naturel n, notons $\mathcal{P}(n)$: « $1 \leqslant u_{n+1} < u_n \leqslant 3$ ».

Initialisation. $u_0 = 3$ et $u_1 = \dfrac{15}{13} \approx 1{,}154$, donc $1 \leqslant u_1 < u_0 \leqslant 3$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit k un entier naturel tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Les nombres 1, u_{k+1}, u_k, 3 appartiennent à $[1\,;\,3] \subset \left]-\frac{4}{3}\,;\,+\infty\right[$, où f est strictement croissante :

$$\begin{aligned}
1 \leqslant u_{k+1} < u_k \leqslant 3 &\iff f(1) \leqslant f(u_{k+1}) < f(u_k) \leqslant f(3) && (f \text{ strictement croissante}) \\
&\iff 1 \leqslant u_{k+2} < u_{k+1} \leqslant \frac{15}{13} && (f(1) = \tfrac{7}{7} = 1,\ f(3) = \tfrac{15}{13}) \\
&\implies 1 \leqslant u_{k+2} < u_{k+1} \leqslant 3 && (\text{car } \tfrac{15}{13} \leqslant 3)
\end{aligned}$$

$\mathcal{P}(k+1)$ est donc vraie.

Conclusion. $\mathcal{P}(0)$ est vraie et la propriété est héréditaire : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{1 \leqslant u_{n+1} < u_n \leqslant 3}$.

3) D'après la question précédente, la suite (u_n) est décroissante ($u_{n+1} < u_n$) et minorée par 1. D'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge (vers une limite $\ell \geqslant 1$).

Partie C $\quad v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}.$

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $u_n > 0$, $u_n + 1 \neq 0$ et $v_n = \dfrac{(u_n+1)-2}{u_n+1} = 1 - \dfrac{2}{u_n+1} < 1$, donc $1 - v_n \neq 0$.

$$\begin{aligned} v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} &\iff v_n\,(u_n+1) = u_n - 1 \\ &\iff v_n\,u_n - u_n = -1 - v_n \\ &\iff u_n\,(1 - v_n) = 1 + v_n \\ &\iff u_n = \frac{1+v_n}{1-v_n} \qquad \text{(car } 1 - v_n \neq 0\text{)} \end{aligned}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}}$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on réduit au même dénominateur $4 + 3u_n$:

$$u_{n+1} - 1 = \frac{3 + 4u_n - (4 + 3u_n)}{4 + 3u_n} = \frac{u_n - 1}{4 + 3u_n}$$

$$u_{n+1} + 1 = \frac{3 + 4u_n + 4 + 3u_n}{4 + 3u_n} = \frac{7(u_n+1)}{4 + 3u_n}.$$

Donc

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} = \frac{u_n - 1}{4 + 3u_n} \times \frac{4 + 3u_n}{7(u_n+1)} = \frac{1}{7} \times \frac{u_n - 1}{u_n + 1} = \frac{1}{7}\,v_n.$$

La suite (v_n) est géométrique de raison $\boxed{q = \dfrac{1}{7}}$, de premier terme $v_0 = \dfrac{3-1}{3+1} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{v_n = \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{7}\right)^n}$, puis

$$u_n = \frac{1 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{7}\right)^n}{1 - \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{7}\right)^n} \qquad \text{soit, en multipliant par } 2 \times 7^n : \qquad \boxed{u_n = \frac{2 \times 7^n + 1}{2 \times 7^n - 1}}.$$

Vérification : $u_0 = \dfrac{3}{1} = 3$ et $u_1 = \dfrac{15}{13}$.

4) Comme $-1 < \dfrac{1}{7} < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{7}\right)^n = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$. Par quotient :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1+0}{1-0} = \boxed{1}.$$

(On retrouve bien une limite $\ell \geqslant 1$, solution de $f(\ell) = \ell$.)

Exercice 4

9 points

Partie A – Détermination des paramètres

1) L'affirmation est vraie. Sur le graphique, près de A, la courbe est située sous sa tangente (AB)

et « tourne vers le bas » : f est concave au voisinage de 0 (et jusqu'au maximum, vers $x = 6$). Pour les grandes valeurs de x (au-delà de 12 environ), la courbe décroît en s'aplatissant vers l'axe des abscisses et se retrouve au-dessus de ses tangentes : f y est convexe. La convexité change donc au moins une fois : $\mathscr{C}_f$ admet au moins un point d'inflexion (entre $x = 6$ et $x = 12$ environ).

2) $A(0\,;\,-12) \in \mathscr{C}_f$, donc $\boxed{f(0) = -12}$.
$f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente en A, c'est-à-dire de la droite (AB) :

$$f'(0) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - (-12)}{2 - 0} = \boxed{6}.$$

3) $f = u \times v$ avec $u(x) = x^2 - b$, $u'(x) = 2x$, $v(x) = \mathrm{e}^{ax}$, $v'(x) = a\,\mathrm{e}^{ax}$:

$$f'(x) = 2x\,\mathrm{e}^{ax} + \left(x^2 - b\right) a\,\mathrm{e}^{ax}, \quad \text{soit} \quad \boxed{f'(x) = \left(ax^2 + 2x - ab\right)\mathrm{e}^{ax}}.$$

4) $f(0) = (0 - b)\,\mathrm{e}^0 = -b$ et $f(0) = -12$, donc $\boxed{b = 12}$.
$f'(0) = (0 + 0 - ab)\,\mathrm{e}^0 = -ab = -12a$ et $f'(0) = 6$, donc $-12a = 6$, soit $\boxed{a = -0{,}5}$.
Ainsi $f(x) = \left(x^2 - 12\right)\mathrm{e}^{-0{,}5x}$: c'est la fonction g de la partie B, restreinte à $[0\,;\,30]$.

Partie B – Étude d'une fonction $g(x) = \left(x^2 - 12\right)\mathrm{e}^{-0{,}5x}$.

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2 - 12\right) = +\infty$ et, comme $\lim\limits_{x \to -\infty} (-0{,}5x) = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$, par composition $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-0{,}5x} = +\infty$. Par produit :

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty}.$$

2) $g = u \times v$ avec $u(x) = x^2 - 12$, $u'(x) = 2x$, $v(x) = \mathrm{e}^{-0{,}5x}$, $v'(x) = -0{,}5\,\mathrm{e}^{-0{,}5x}$:

$$g'(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-0{,}5x} - 0{,}5\left(x^2 - 12\right)\mathrm{e}^{-0{,}5x} = \left(2x - 0{,}5x^2 + 6\right)\mathrm{e}^{-0{,}5x} = \left(-0{,}5x^2 + 2x + 6\right)\mathrm{e}^{-0{,}5x}.$$

Comme $\mathrm{e}^{-0{,}5x} > 0$, $g'(x)$ a le signe du trinôme $-0{,}5x^2 + 2x + 6$:
$\Delta = 2^2 - 4 \times (-0{,}5) \times 6 = 4 + 12 = 16$, racines $x_1 = \dfrac{-2 - 4}{-1} = 6$ et $x_2 = \dfrac{-2 + 4}{-1} = -2$.
Le coefficient de x^2 est négatif : le trinôme est positif entre les racines, négatif à l'extérieur.
$g(-2) = (4 - 12)\,\mathrm{e}^1 = -8\mathrm{e} \approx -21{,}75$ et $g(6) = (36 - 12)\,\mathrm{e}^{-3} = 24\,\mathrm{e}^{-3} \approx 1{,}19$.

x	$-\infty$		-2		6		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
g	$+\infty$	↘	$-8\mathrm{e}$	↗	$24\,\mathrm{e}^{-3}$	↘	0

3) Comme $\mathrm{e}^{-0{,}5x} > 0$: $g(x) = 0 \iff x^2 - 12 = 0 \iff x = -2\sqrt{3}$ ou $x = 2\sqrt{3}$.
Sur $[0\,;\,12]$, la seule solution est $\alpha = 2\sqrt{3}$, d'où $\boxed{\alpha \approx 3{,}46}$.
(Contrôle à la calculatrice : $g(3{,}46) \approx -0{,}005 < 0$ et $g(3{,}47) \approx 0{,}007 > 0$.)

Partie C – Application économique

1) $g(15) = (225 - 12)\,\mathrm{e}^{-7,5} = 213\,\mathrm{e}^{-7,5} \approx 0,117\,8$ centaine de milliers d'objets, soit environ $11\,781$ objets.
Au millier près, la demande est de $\boxed{12\,000 \text{ objets}}$ pour un prix unitaire de 15 euros.

2) $g'(15) = (-0,5 \times 225 + 30 + 6)\,\mathrm{e}^{-7,5} = -76,5\,\mathrm{e}^{-7,5}$, donc

$$E(15) = \frac{g'(15)}{g(15)} \times 15 = \frac{-76,5\,\mathrm{e}^{-7,5}}{213\,\mathrm{e}^{-7,5}} \times 15 = \frac{-1\,147,5}{213} = -\frac{765}{142} \approx \boxed{-5,39}.$$

Interprétation : lorsque le prix unitaire est de 15 euros, une augmentation de $1\,\%$ du prix entraîne une **baisse** de la demande d'environ $5,39\,\%$.