Calculatrice autorisée

Exercice 1

7 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions posées, une seule des réponses est exacte. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

Partie A

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres 20 et $0{,}2$. On note Y la variable aléatoire vérifiant : $Y = 5X - 2$.

1) $P(X = 2)$ est égale à :

a. $\binom{20}{2} 0{,}2^{20} \times 0{,}8$ **b.** $190 \times 0{,}2^2 \times 0{,}8^{18}$ **c.** $0{,}2^2 \times 0{,}8^{18}$

d. $190 \times 0{,}2^2$ **e.** $\binom{20}{2} 0{,}2^{18} \times 0{,}8^2$ **f.** $0{,}206$

2) $V(X)$ est égale à :

a. $0{,}32$ **b.** $3{,}2$ **c.** $\sqrt{3{,}2}$ **d.** $\sqrt{0{,}32}$ **e.** 4 **f.** $0{,}2$

3) $E(Y)$ est égale à :

a. 20 **b.** 3 **c.** 22 **d.** 18 **e.** -2 **f.** 6

4) $P(3 \leqslant X \leqslant 7)$ est égale à :

a. $P(X \leqslant 7) - P(X \leqslant 3)$ **b.** $P(X \leqslant 7) - P(X \leqslant 2)$ **c.** $P(X \leqslant 7) - P(X \geqslant 3)$

d. $P(X \leqslant 8) - P(X \leqslant 3)$ **e.** $P(X \leqslant 7) - P(X < 2)$ **f.** $P(X \leqslant 7) + P(X \leqslant 2)$

5) $V(Y)$ est égale à :

a. 16 **b.** $3{,}2$ **c.** 80 **d.** 85 **e.** 40 **f.** $62{,}5$

Partie B

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 6x^2 + 1$.

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) =$

a. 0 **b.** $+\infty$ **c.** $-\infty$ **d.** 1 **e.** -1 **f.** n'existe pas

2) La courbe représentative de g admet comme point d'inflexion :

a. $A(0\,;\,1)$ **b.** $B(1\,;\,-4)$ **c.** $C(2\,;\,-15)$

d. $D(2\,;\,0)$ **e.** $E(4\,;\,-31)$ **f.** $O(0\,;\,0)$

Exercice 2

12 points

Dans cet exercice, les résultats approchés seront donnés à 10^{-3} près.

Un pisciculteur souhaite dépister une maladie qui touche certaines truites de son étang. On sait que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez une truite, on peut la soigner ; sinon la truite doit être retirée de l'étang.
Un test basé sur une analyse d'écailles est mis au point et essayé sur un échantillon de truites dont $4\,\%$ sont porteuses de la maladie. On obtient les résultats suivants :

- si une truite est porteuse de la maladie, le test est positif dans $75\,\%$ des cas ;

- si une truite est saine, le test est négatif dans $85\,\%$ des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour l'étang entier et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie. On note :

- M l'événement : « la truite est porteuse de la maladie » ;
- T l'événement : « le test est positif ».

Partie A

1) Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.

2) Une truite est choisie au hasard.

a. Quelle est la probabilité qu'elle soit porteuse de la maladie et que son test soit positif ?

b. Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est égale à $0{,}174$.

3) Une truite est choisie au hasard parmi celles dont le test est positif. Quelle est la probabilité, arrondie au centième, pour qu'elle soit porteuse de la maladie ?

Partie B

Le test est ensuite utilisé sur 10 truites de l'étang. La taille de l'étang permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise. On note X la variable aléatoire qui, aux 10 truites testées, associe le nombre de truites ayant un test positif.

1) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Préciser ses paramètres.

2) Calculer $E(X)$, l'espérance de la variable X. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

3) Quelle est la probabilité pour qu'exactement deux des 10 truites aient un test positif ? *(arrondir le résultat au millième)*

4) Quelle est la probabilité pour qu'au moins deux des 10 truites aient un test positif ? *(arrondir le résultat au millième)*

5) Quelle est la probabilité pour qu'au plus trois des 10 truites aient un test positif ? *(arrondir le résultat au millième)*

Partie C

Le coût des soins à prodiguer à une truite ayant réagi positivement au test est de 15 euros et le coût du retrait de l'étang d'une truite non dépistée par le test et ayant développé la maladie est de 150 euros. On suppose que le test est gratuit.

1) En utilisant les données précédentes, compléter la loi de probabilité du coût à engager par truite subissant le test :

Coût	0	15	150
Probabilité			

2) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire associant à une truite le coût à engager.

3) Un pisciculteur possède un étang de 200 truites. Si tout l'étang est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir d'engager ?

Exercice 3

12 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\frac{4}{3}\,;\,+\infty\right[$ par $f(x)=\dfrac{3+4x}{4+3x}$.

Partie A

1) Calculer les limites de f en $-\dfrac{4}{3}$ et en $+\infty$. Préciser les éventuelles asymptotes de la courbe représentative de f.

2) Déterminer les variations de f sur l'intervalle $\left]-\dfrac{4}{3}\,;\,+\infty\right[$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{3+4u_n}{4+3u_n}$.
Ainsi, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = f(u_n)$. On admet que tous les termes de la suite sont définis et strictement positifs.

1) Calculer u_1.

2) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $1 \leqslant u_{n+1} < u_n \leqslant 3$.

3) En déduire que la suite (u_n) converge.

Partie C

On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

1) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$.

2) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{7}$.

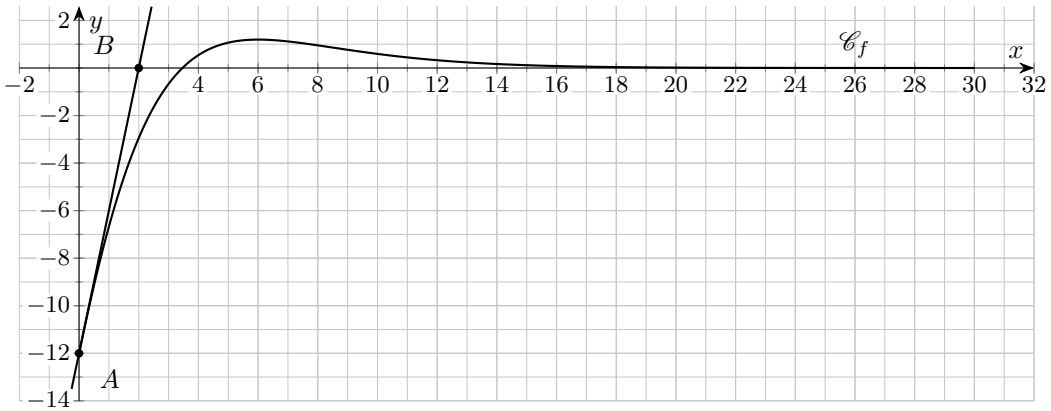
3) Écrire v_n et u_n en fonction de n.

4) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 4

9 points

Dans le repère orthogonal donné ci-dessous, $\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $[0\,;\,30]$, de la forme $f(x) = \left(x^2 - b\right)\mathrm{e}^{ax}$, où a et b sont deux nombres réels à déterminer.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(0\,;\,-12)$ passe par le point $B(2\,;\,0)$.



Dans toute la suite, on note f' la dérivée de la fonction f.

Partie A – Détermination des paramètres

1) L'affirmation « la courbe $\mathscr{C}_f$ admet au moins un point d'inflexion » est-elle vraie ou fausse ? Justifier en utilisant le graphique.

2) Lire graphiquement les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$.

3) Exprimer la dérivée f' de la fonction f en fonction de a et b.

4) En déduire les valeurs des réels a et b.

Partie B – Étude d'une fonction

Dans cette partie, on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \left(x^2 - 12\right) \mathrm{e}^{-0{,}5x}.$$

1) Déterminer la limite de la fonction g en $-\infty$.
On admettra que la limite de la fonction g en $+\infty$ est égale à 0.

2) Vérifier que, pour tout nombre réel x, $g'(x) = \left(-0{,}5x^2 + 2x + 6\right) \mathrm{e}^{-0{,}5x}$, puis dresser le tableau des variations de g sur $\mathbb{R}$.

3) On admet que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0\,;\,12]$. En donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Partie C – Application économique

Dans cette partie, les résultats seront arrondis à 10^{-2} si nécessaire.

La fonction de demande d'un produit est modélisée sur l'intervalle $[5\,;\,30]$ par la fonction g étudiée dans la partie B. Le nombre $g(x)$ représente la quantité demandée, exprimée en centaines de milliers d'objets, lorsque le prix unitaire est égal à x euros.

1) Calculer le nombre d'objets demandés, au millier près, lorsque le prix unitaire est fixé à 15 euros.

2) L'élasticité $E(x)$ de la demande par rapport au prix est le pourcentage de variation de la demande pour une augmentation de $1\,\%$ du prix.
On admet qu'une bonne approximation de $E(x)$ est donnée par :

$$E(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} \times x \quad \text{lorsque } x \in [5\,;\,30].$$

Calculer $E(15)$ et interpréter le résultat.