Exercice n°1 (6 points)

1. **Définition :** Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ (ou $\vec{v} = k\vec{u}$). Géométriquement, cela signifie qu'ils ont la même direction.

2. **Justification de l'égalité vectorielle :** On part du membre de gauche :

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD}$$

On réorganise les termes pour utiliser la relation de Chasles ($\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}$) :

$$= \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$$

On applique à nouveau la relation de Chasles ($\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$) :

$$= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \boxed{\overrightarrow{CB}}$$

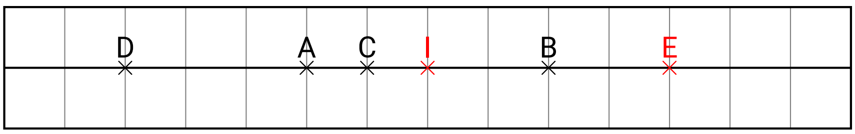
3. **Lecture graphique sur la droite :** Positions : $D(2)$, $A(5)$, $C(6)$, $B(9)$.

(a) Complétons les égalités :

- $\overrightarrow{AB}$: longueur $9 - 5 = 4$. $\overrightarrow{AC}$: longueur $6 - 5 = 1$. Donc $\boxed{\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}}$.
- $\overrightarrow{AD}$: longueur $2 - 5 = -3$ (sens opposé). Donc $\boxed{\overrightarrow{AD} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}}$.
- $\overrightarrow{CB}$: longueur $9 - 6 = 3$. $\overrightarrow{AD}$: longueur -3. Donc $\boxed{\overrightarrow{CB} = -1\overrightarrow{AD}}$.

(b) **Placement des points :**

- $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(4) = 2$. On part de B(9) et on avance de 2. Donc E est à l'abscisse 11.
- $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \iff I$ est le milieu de $[AB]$. $x_I = \frac{5+9}{2} = 7$.



4. **Dans le triangle ABC :** (a) Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$:

- $\overrightarrow{AA} = \mathbf{0}\overrightarrow{AB} + \mathbf{0}\overrightarrow{AC} \implies A(0\,;\,0)$.
- $\overrightarrow{AB} = \mathbf{1}\overrightarrow{AB} + \mathbf{0}\overrightarrow{AC} \implies B(1\,;\,0)$.
- $\overrightarrow{AC} = \mathbf{0}\overrightarrow{AB} + \mathbf{1}\overrightarrow{AC} \implies C(0\,;\,1)$.

(b) Coordonnées des milieux :

- I milieu de $[AB]$: $I(0,5\,;\,0)$.
- J milieu de $[AC]$: $J(0\,;\,0,5)$.

(c) Coordonnées des vecteurs :

- $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0-1\\1-0\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}}$.
- $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0-0,5\\0,5-0\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}-0,5\\0,5\end{pmatrix}}$.

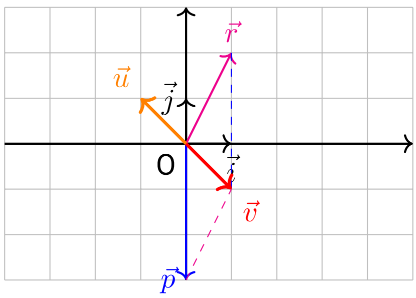
(d) On remarque que $\overrightarrow{IJ} = 0,5 \times \overrightarrow{BC}$. Les coordonnées sont proportionnelles. Les vecteurs sont donc **colinéaires**. On en déduit que les droites (BC) et (IJ) sont **parallèles** (Théorème des milieux).

Exercice n°2 (4 points)

Partie A : Par construction

1. On construit la somme $\vec{v} = \vec{p} + \vec{r}$ en utilisant la règle du parallélogramme (ou du bout à bout).

2. Pour l'équilibre, on doit avoir $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$, donc $\vec{u} = -\vec{v}$.



Partie B : Par calcul

1. Lectures graphiques : $\boxed{\vec{p}(0\,;\,-3)}$ et $\boxed{\vec{r}(1\,;\,2)}$.

2. Coordonnées de $\vec{v} = \vec{p} + \vec{r}$:

$$\begin{pmatrix}x_v\\y_v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0+1\\-3+2\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}}$$

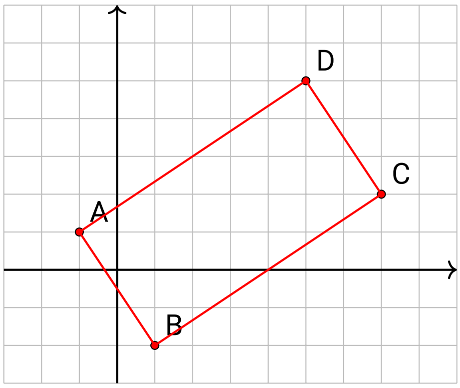
3. On cherche $\vec{u}(x\,;\,y)$ tel que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$.

$$\begin{cases}x+1=0\\y-1=0\end{cases} \iff \begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$$

Le vecteur poussée est $\boxed{\vec{u}(-1\,;\,1)}$.

Exercice n°3 (6 points)

1. **Placement des points :** Voir graphique ci-dessous.



2. Calcul des coordonnées des vecteurs :
   - $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-(-1)\\-2-1\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}}$
   - $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}7-5\\2-5\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}}$

3. On constate que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. L'égalité vectorielle prouve que le quadrilatère $ABCD$ est un **parallélogramme**.

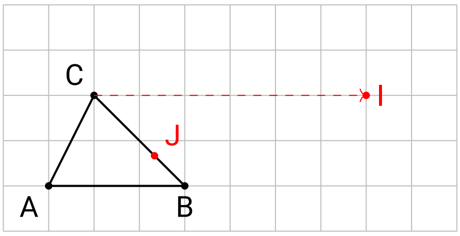
4. Calcul des distances :
   - $AB = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} = \boxed{\sqrt{13}}$.
   - $BC = \sqrt{(7-1)^2 + (2-(-2))^2} = \sqrt{6^2+4^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52} = \boxed{2\sqrt{13}}$.

5. Nature du triangle ABC : $AC^2 = (\sqrt{65})^2 = 65$. $AB^2+BC^2 = 13+52 = 65$. Comme $AB^2+BC^2 = AC^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est **rectangle en B**.

6. $ABCD$ est un parallélogramme ayant un angle droit, c'est donc un **rectangle**.

Exercice n°4 (5 points)

1. **Construction :** $\overrightarrow{CI} = 2\overrightarrow{AB}$ (partir de C, 2 fois le vecteur AB). $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ (J est sur [BC]).



2. **Expression de $\overrightarrow{AI}$:** Chasles : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI}$. Or $\overrightarrow{CI} = 2\overrightarrow{AB}$. Donc $\boxed{\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}$.

3. (a) Chasles : $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}$. Comme $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, on a $\boxed{\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}}$.

   (b) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}}$$

4. **Relation :** $3 \times \overrightarrow{AJ} = 3\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI}$. Donc $\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AJ}$. Le réel est $\boxed{k = 3}$.

5. Les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ sont colinéaires et partagent le point A. Les points **A, I et J sont alignés**.