Exercice 1

2 points

Les quatre formes indéterminées sont :

$$\boxed{\text{« } \infty - \infty \text{ »}} \qquad \boxed{\text{« } 0 \times \infty \text{ »}} \qquad \boxed{\text{« } \frac{\infty}{\infty} \text{ »}} \qquad \boxed{\text{« } \frac{0}{0} \text{ »}}$$

Dans ces quatre cas, les opérations sur les limites ne permettent pas de conclure directement : il faut transformer l'écriture (factoriser, développer…) ou encadrer la suite. La forme « $\infty - \infty$ » désigne précisément la somme d'une suite qui tend vers $+\infty$ et d'une suite qui tend vers $-\infty$.

Exercice 2

18 points

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul.

1) $u_n = (1-2n)(n^2+3)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}(1-2n) = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2+3) = +\infty$.

Par produit (« $-\infty \times (+\infty)$ », ce n'est pas une forme indéterminée) :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$$

2) $u_n = 4n - 1 + \dfrac{5}{\sqrt{n}}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}(4n-1) = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n} = +\infty$, donc par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5}{\sqrt{n}} = 0$.

Par somme :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$$

3) $u_n = \dfrac{-n^3+2n^2+8}{5n^6-3n}$.

Le numérateur tend vers $-\infty$ et le dénominateur vers $+\infty$: c'est une forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

On factorise par le terme de plus haut degré en haut et en bas :

$$u_n = \frac{n^3\left(-1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{8}{n^3}\right)}{n^6\left(5-\dfrac{3}{n^5}\right)} = \frac{1}{n^3}\times\frac{-1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{8}{n^3}}{5-\dfrac{3}{n^5}}.$$

Or $\dfrac{2}{n}$, $\dfrac{8}{n^3}$ et $\dfrac{3}{n^5}$ tendent vers 0, donc le second facteur tend vers $\dfrac{-1}{5} = -\dfrac{1}{5}$, et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^3} = 0$.

Par produit :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$

4) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}(-3n+5)$.

Le premier facteur tend vers 0 et le second vers $-\infty$: forme indéterminée « $0\times\infty$ ». On développe, en utilisant $\dfrac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$:

$$u_n = \frac{-3n}{\sqrt{n}} + \frac{5}{\sqrt{n}} = -3\sqrt{n} + \frac{5}{\sqrt{n}}.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (-3\sqrt{n}) = -\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{\sqrt{n}} = 0$.

Par somme :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$$

5) $u_n = -n^4 - \dfrac{(-1)^n}{n^2}$.

$(-1)^n$ vaut 1 ou -1 : la suite $\left(\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right)$ n'a pas d'écriture simple, on l'encadre. Pour tout $n \geqslant 1$:

$$-1 \leqslant -(-1)^n \leqslant 1 \quad \text{donc} \quad -\frac{1}{n^2} \leqslant -\frac{(-1)^n}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2} \quad (\text{on divise par } n^2 > 0).$$

En ajoutant $-n^4$, et comme $\dfrac{1}{n^2} \leqslant 1$:

$$u_n \leqslant -n^4 + \frac{1}{n^2} \leqslant -n^4 + 1.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} (-n^4+1) = -\infty$. La suite (u_n) est majorée par une suite qui tend vers $-\infty$; par comparaison :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$$

6) $u_n = \dfrac{4\cos(n+1)}{3n} - 2$.

Pour tout réel x, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, donc pour tout $n \geqslant 1$:

$$-4 \leqslant 4\cos(n+1) \leqslant 4 \quad \text{puis} \quad -\frac{4}{3n} \leqslant \frac{4\cos(n+1)}{3n} \leqslant \frac{4}{3n} \quad (\text{on divise par } 3n > 0),$$

$$\text{d'où} \quad -\frac{4}{3n} - 2 \leqslant u_n \leqslant \frac{4}{3n} - 2.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{3n} = 0$, les deux suites qui encadrent (u_n) tendent vers -2. D'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = -2}$$

7) $u_n = \dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 5}{n}$.

$\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ est le produit de n facteurs de valeur absolue $\frac{1}{2}$, donc sa valeur absolue $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ est inférieure ou égale à 1 : pour tout $n \geqslant 1$,

$$-1 \leqslant \left(-\frac{1}{2}\right)^n \leqslant 1 \quad \text{donc} \quad 4 \leqslant \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 5 \leqslant 6,$$

puis, en divisant par $n > 0$: $\quad \dfrac{4}{n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{6}{n}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6}{n} = 0$, d'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$