Exercice 1 — Trois équations avec un logarithme

1,5 point

1) Pour tout réel x :

$$\mathrm{e}^{2x} - 5 = 0 \iff \mathrm{e}^{2x} = 5 \iff 2x = \ln 5 \iff x = \frac{\ln 5}{2}.$$

L'équation a une unique solution : $\boxed{x = \dfrac{\ln 5}{2} \approx 0{,}80}$.

2) Pour $x > 1$, $2x > 0$ et $x - 1 > 0$: les deux logarithmes sont définis. D'après la relation $\ln a - \ln b = \ln \dfrac{a}{b}$:

$$\ln(2x) - \ln(x-1) = \ln 3 \iff \ln \frac{2x}{x-1} = \ln 3 \iff \frac{2x}{x-1} = 3 \iff 2x = 3(x-1) \iff x = 3,$$

la fonction $\ln$ étant strictement croissante (deux réels strictement positifs de même logarithme sont égaux). Comme $3 \in]1\,;+\infty[$, la solution est $\boxed{x = 3}$. *Vérification :* $\ln 6 - \ln 2 = \ln 3$.

3) Pour tout entier naturel n, $0{,}8^n > 0$ et $0{,}1 > 0$; la fonction $\ln$ étant strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$:

$$0{,}8^n \leqslant 0{,}1 \iff \ln(0{,}8^n) \leqslant \ln 0{,}1 \iff n \ln 0{,}8 \leqslant \ln 0{,}1 \iff n \geqslant \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}8},$$

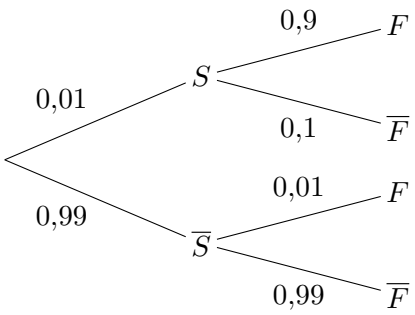
le sens de l'inégalité changeant car $\ln 0{,}8 < 0$. Or $\dfrac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}8} \approx 10{,}32$, donc les solutions sont les entiers $\boxed{n \geqslant 11}$.

Vérification : $0{,}8^{10} \approx 0{,}107 > 0{,}1$ et $0{,}8^{11} \approx 0{,}086 \leqslant 0{,}1$.

Exercice 2 — La détection des fraudes à la carte bancaire

3,5 points

D'après l'énoncé : $P(S) = 0{,}01$, $P(\overline{S}) = 0{,}99$, $P_S(F) = 0{,}9$ et $P_{\overline{S}}(F) = 0{,}01$.



1) VRAI. S et $\overline{S}$ forment une partition de l'univers ; d'après la formule des probabilités totales :

$$P(F) = P(S)\,P_S(F) + P(\overline{S})\,P_{\overline{S}}(F) = 0{,}01 \times 0{,}9 + 0{,}99 \times 0{,}01$$

$$P(F) = 0{,}009 + 0{,}009\,9, \qquad \boxed{P(F) = 0{,}018\,9}.$$

2) FAUX. La probabilité qu'un paiement signalé soit frauduleux est la probabilité conditionnelle $P_F(S)$; comme $P(F) \neq 0$:

$$P_F(S) = \frac{P(S \cap F)}{P(F)} = \frac{0{,}01 \times 0{,}9}{0{,}018\,9} = \frac{0{,}009}{0{,}018\,9} = \frac{90}{189} = \frac{10}{21}, \qquad \boxed{P_F(S) \approx 0{,}476}.$$

Un paiement signalé a moins d'une chance sur deux d'être frauduleux : plus de la moitié des paiements signalés sont en réalité honnêtes, parce que les fraudes sont rares ($1\,\%$) et que les fausses alertes, même à $1\,\%$, portent sur les $99\,\%$ de paiements honnêtes.

3) VRAI. Avec $P(S) = 0{,}1$ et le même algorithme :

$$P(F) = 0{,}1 \times 0{,}9 + 0{,}9 \times 0{,}01 = 0{,}09 + 0{,}009 = 0{,}099$$

$$P_F(S) = \frac{P(S \cap F)}{P(F)} = \frac{0{,}09}{0{,}099} = \frac{90}{99} = \frac{10}{11}, \qquad \boxed{P_F(S) \approx 0{,}909 > 0{,}9}.$$

La fiabilité d'un signalement dépend de la proportion de fraudes : plus elles sont fréquentes, plus un signalement est fiable, sans que l'algorithme ait changé.

4) FAUX. Il suffit d'un contre-exemple : dans la situation de l'exercice, $P_S(F) = 0{,}9$ (un paiement frauduleux est signalé 9 fois sur 10) alors que $P_F(S) = \dfrac{10}{21} \approx 0{,}476$ (question 2). Donc $P_S(F) \neq P_F(S)$: $\boxed{\text{l'affirmation est fausse}}$.

En général, $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ et $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$: ces deux nombres sont égaux seulement si $P(A) = P(B)$ ou si A et B sont incompatibles (ils valent alors tous deux 0).

Exercice 3 — Primitives et équation différentielle

2,5 points

1) Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $F : x \longmapsto 6 \times \dfrac{x^3}{3} - 4 \times \dfrac{x^2}{2} + 3x + C = 2x^3 - 2x^2 + 3x + C$, avec C réel.

$$F(1) = 0 \iff 2 - 2 + 3 + C = 0 \iff C = -3.$$

La primitive cherchée est $\boxed{F(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3x - 3}$.

2) On reconnaît la forme $u'\,\mathrm{e}^u$ avec $u(x) = x^2$ et $u'(x) = 2x$. Une primitive de g est donc $\boxed{G(x) = \mathrm{e}^{x^2}}$.

Vérification : $G'(x) = 2x\,\mathrm{e}^{x^2} = g(x)$.

3) **a.** Une fonction constante $y = c$ a pour dérivée 0 ; elle est solution de (E) si et seulement si $0 = -0{,}5\,c + 3$, soit $c = 6$. La solution constante est $\boxed{y = 6}$.

Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $\boxed{y(x) = C\,\mathrm{e}^{-0{,}5x} + 6}$, où C est une constante réelle (solutions de $y' = -0{,}5\,y$ augmentées de la solution constante).

b. $h(0) = 10 \iff C\,\mathrm{e}^0 + 6 = 10 \iff C = 4$. Donc $\boxed{h(x) = 6 + 4\,\mathrm{e}^{-0{,}5x}}$.

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} (-0{,}5x) = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^X = 0$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-0{,}5x} = 0$, d'où $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 6}$:

la solution tend vers la solution constante.

Exercice 4 — Une courbe et sa tangente

3,5 points

1) La courbe passe par le point de coordonnées $(0\,;1)$, donc $\boxed{f(0)=1}$. En ce point la courbe atteint son maximum et la tangente est horizontale : $\boxed{f'(0)=0}$.
Vérification : $f(0)=1\times \mathrm{e}^{0}=1$ et $f'(x)=\mathrm{e}^{-x}-(x+1)\,\mathrm{e}^{-x}=-x\,\mathrm{e}^{-x}$, donc $f'(0)=0$.

2) Sur $[-1\,;1]$, la courbe est située *au-dessous* de ses tangentes (elle « tourne » vers le bas) : f semble $\boxed{\text{concave sur } [-1\,;1]}$. Sur $[1\,;4]$, la courbe est située au-dessus de ses tangentes : f semble $\boxed{\text{convexe sur } [1\,;4]}$.
En I, la courbe traverse sa tangente et change de convexité : I est un $\boxed{\text{point d'inflexion}}$.

3) f est concave sur $[-1\,;1]$, donc sur cet intervalle la courbe $\mathscr{C}$ est $\boxed{\text{au-dessous de } T}$. f est convexe sur $[1\,;4]$, donc sur cet intervalle $\mathscr{C}$ est $\boxed{\text{au-dessus de } T}$. C'est bien ce que l'on observe : la tangente en un point d'inflexion traverse la courbe.

4) Pour tout $x\in[-1\,;4]$, $\mathrm{e}^{-x}>0$, donc $f''(x)$ est du signe de $x-1$:

x	-1		1		4
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
convexité de f		*concave*		*convexe*	

$f''\leqslant 0$ sur $[-1\,;1]$: f est $\boxed{\text{concave sur } [-1\,;1]}$; $f''\geqslant 0$ sur $[1\,;4]$: f est $\boxed{\text{convexe sur } [1\,;4]}$. f'' s'annule en changeant de signe en $x=1$: le point $I\left(1\,;\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)$ est bien un point d'inflexion, ce qui confirme la lecture graphique.

Exercice 5 — La loi de Moore

5 points

Partie A — Un ajustement exponentiel

1) $\dfrac{7\,200\,000}{2{,}3}\approx 3\,130\,000$: le nombre de transistors a été multiplié par environ $\boxed{3 \text{ millions}}$ en 45 ans.
Les valeurs de N s'étalent de $2{,}3$ à $7\,200\,000$ milliers : les six premiers points seraient écrasés sur l'axe des abscisses à l'échelle du dernier. Une droite ne peut pas rendre compte d'une croissance aussi rapide, qui ressemble à une croissance exponentielle (multiplication par un même facteur à intervalles de temps réguliers) : $\boxed{\text{un ajustement affine de } (t\,;N) \text{ n'est pas adapté}}$.

2) $\ln 29\approx 3{,}367$; $\ln 42\,000\approx 10{,}645$; $\ln 7\,200\,000\approx 15{,}790$.

t_i	1	8	15	23	30	38	46
$z_i = \ln N_i$	0,833	$\boxed{3{,}367}$	5,617	8,039	$\boxed{10{,}645}$	13,502	$\boxed{15{,}790}$

3) La calculatrice (mode statistiques à deux variables, régression linéaire de z en t) donne $a \approx 0{,}334$, $b \approx 0{,}57$ et $r \approx 0{,}9996$, soit :

$$\boxed{z = 0{,}334\,t + 0{,}57}, \qquad \boxed{r \approx 0{,}999\,6}.$$

Le coefficient de corrélation est extrêmement proche de 1 : les points $(t_i\,;z_i)$ sont presque parfaitement alignés, l'ajustement affine de z en t est excellent.

4) $z = \ln N$, donc $N = \mathrm{e}^z$. Avec $z = 0{,}334\,t + 0{,}57$:

$$N = \mathrm{e}^{0{,}334\,t + 0{,}57} = \mathrm{e}^{0{,}57} \times \mathrm{e}^{0{,}334\,t}, \qquad \text{et } \mathrm{e}^{0{,}57} \approx 1{,}77,$$

d'où $\boxed{N(t) \approx 1{,}77\,\mathrm{e}^{0{,}334\,t}}$ (en milliers de transistors).

5) Pour tout t, $N(t+T) = 1{,}77\,\mathrm{e}^{0{,}334\,(t+T)} = N(t) \times \mathrm{e}^{0{,}334\,T}$: N est multiplié par $\mathrm{e}^{0{,}334\,T}$ tous les T ans. Il est doublé lorsque

$$\mathrm{e}^{0{,}334\,T} = 2 \iff 0{,}334\,T = \ln 2 \iff T = \frac{\ln 2}{0{,}334} \approx 2{,}08, \qquad \boxed{T \approx 2{,}1 \text{ ans}}.$$

Selon ce modèle, le nombre de transistors a doublé environ tous les deux ans entre 1971 et 2016 : $\boxed{\text{la prévision de Moore est bien vérifiée sur cette période}}$.

Partie B — Jusqu'où ?

6) En 2026, $t = 56$: $N(56) = 1{,}77\,\mathrm{e}^{0{,}334\times 56} = 1{,}77\,\mathrm{e}^{18{,}704} \approx 2{,}35 \times 10^8$ milliers, soit $2{,}35 \times 10^{11}$ transistors : $\boxed{\text{environ } 235 \text{ milliards de transistors}}$.

(Selon les arrondis utilisés, toute valeur de 230 à 240 milliards est acceptée.)

Pour 2024 ($t = 54$), le modèle donne $N(54) = 1{,}77\,\mathrm{e}^{0{,}334\times 54} \approx 1{,}2 \times 10^8$ milliers, soit environ 120 milliards de transistors. Le processeur réel (208 milliards) est donc *en avance* sur le modèle, mais du même ordre de grandeur : la croissance exponentielle reste une bonne description une dizaine d'années après la dernière donnée, ce qui est remarquable pour une extrapolation.

7) Le plafond est 10^{11} milliers. Comme $\mathrm{e}^{0{,}334\,t} > 0$ et que $\ln$ est strictement croissante :

$$1{,}77\,\mathrm{e}^{0{,}334\,t} > 10^{11} \iff \mathrm{e}^{0{,}334\,t} > \frac{10^{11}}{1{,}77} \iff 0{,}334\,t > \ln\left(\frac{10^{11}}{1{,}77}\right)$$

$$\iff t > \frac{\ln\left(10^{11}/1{,}77\right)}{0{,}334} \approx 74{,}1.$$

Le plafond serait dépassé pour $t \geqslant 75$, c'est-à-dire $\boxed{\text{à partir de 2045}}$.

Vérification : $N(74) \approx 9{,}6 \times 10^{10} < 10^{11}$ et $N(75) \approx 1{,}3 \times 10^{11} > 10^{11}$.

Cette prévision est une *extrapolation* à près de trente ans au-delà de la dernière donnée : rien ne garantit que la tendance passée se poursuive. Le modèle exponentiel ignore les limites physiques (taille des atomes, dégagement de chaleur) et économiques (coût des usines) ; il prévoit d'ailleurs lui-même qu'un plafond infranchissable sera atteint, ce qui montre qu'il cessera forcé-

ment d'être valable avant. Un ralentissement de la loi de Moore est du reste déjà observé depuis les années 2010.

Exercice 6 — Tour d'horizon

4 points

1) Réponse c. La suite est arithmético-géométrique ($u_{n+1} = a\,u_n + b$ avec $0 < a < 1$) : elle converge, et sa limite ℓ vérifie $\ell = 0{,}5\,\ell + 3$, soit $0{,}5\,\ell = 3$ et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 6}$. *(Cette recherche du point fixe suffit comme justification.)*

Pour vérifier : en posant $v_n = u_n - 6$, $v_{n+1} = 0{,}5\,u_n + 3 - 6 = 0{,}5\,(u_n - 6) = 0{,}5\,v_n$; (v_n) est géométrique de raison $0{,}5$, $v_0 = 4$, donc $u_n = 6 + 4 \times 0{,}5^n$, qui tend vers 6 car $0 < 0{,}5 < 1$.

2) Réponse a. Quand x tend vers 3 par valeurs supérieures, le numérateur tend vers 7 et le dénominateur vers 0^+ : la limite est $+\infty$, la droite d'équation $x = 3$ est asymptote verticale. Quand x tend vers $+\infty$, $\dfrac{2x+1}{x-3} = \dfrac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}}$ tend vers 2 : la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale.

$\boxed{x = 3 \text{ et } y = 2}$

3) Réponse b. $g = u \times v$ avec $u(x) = x$, $u'(x) = 1$, $v(x) = \mathrm{e}^{2x}$, $v'(x) = 2\,\mathrm{e}^{2x}$:

$$g'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{2x} + x \times 2\,\mathrm{e}^{2x}, \qquad \boxed{g'(x) = (1+2x)\,\mathrm{e}^{2x}}.$$

4) Réponse d. Une primitive de $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$ est $x \longmapsto \mathrm{e}^x$, donc

$$\int_0^{\ln 2} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\ln 2} - \mathrm{e}^0 = 2 - 1, \qquad \boxed{\int_0^{\ln 2} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 1}.$$

5) Réponse b. Pour une loi exponentielle de paramètre λ, $P(X \leqslant x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$ pour $x \geqslant 0$. Ici

$$P(X \leqslant 2) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}5\times 2}, \qquad \boxed{P(X \leqslant 2) = 1 - \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}632}.$$