Devoir commun de mathématiques — Terminale, option maths complémentaires

Durée : 2 heures Calculatrice autorisée (mode examen)

Exercice 1 — Trois équations avec un logarithme

1,5 point

Résoudre dans l'ensemble indiqué. Les solutions seront données sous forme exacte, puis arrondies au centième si nécessaire.

1) Dans $\mathbb{R}$: $\mathrm{e}^{2x} - 5 = 0$.

2) Dans $]1\,;+\infty[$: $\ln(2x) - \ln(x-1) = \ln 3$.

3) Dans $\mathbb{N}$: $0{,}8^{\,n} \leqslant 0{,}1$.

Exercice 2 — La détection des fraudes à la carte bancaire

3,5 points

Une banque surveille les paiements en ligne effectués avec ses cartes : $1\,\%$ de ces paiements sont frauduleux. Un algorithme analyse chaque paiement et le *signale* ou non. Il signale $90\,\%$ des paiements frauduleux, mais aussi, à tort, $1\,\%$ des paiements honnêtes.

On choisit un paiement au hasard ; on note S l'événement « le paiement est frauduleux » et F l'événement « le paiement est signalé par l'algorithme ».

Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse et **justifier**. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Les probabilités seront arrondies au millième si nécessaire.

1) La probabilité qu'un paiement soit signalé est égale à $0{,}018\,9$.

2) Un paiement signalé a plus d'une chance sur deux d'être frauduleux.

3) Pendant les soldes, la part des paiements frauduleux monte à $10\,\%$ (l'algorithme restant le même) : un paiement signalé a alors plus de 9 chances sur 10 d'être frauduleux.

4) Pour deux événements A et B de probabilités non nulles, on a toujours $P_A(B) = P_B(A)$.

Exercice 3 — Primitives et équation différentielle

2,5 points

1) Déterminer la primitive F sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \longmapsto 6x^2 - 4x + 3$ qui vérifie $F(1) = 0$.

2) Donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $g : x \longmapsto 2x\,\mathrm{e}^{x^2}$.

3) On considère l'équation différentielle (E) : $y' = -0{,}5\,y + 3$.

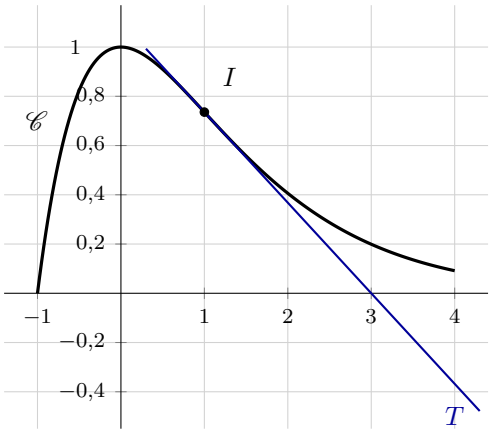
a. Déterminer la fonction constante solution de (E), puis toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminer la solution h de (E) telle que $h(0) = 10$, puis calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$.

Exercice 4 — Une courbe et sa tangente

3,5 points

On a tracé ci-contre la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f définie sur $[-1\,;4]$ par $f(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$, ainsi que sa tangente T au point I d'abscisse 1.



1) Lire graphiquement $f(0)$ et $f'(0)$.

2) Avec la précision permise par le graphique, indiquer sur quel intervalle f semble concave, sur quel intervalle elle semble convexe. Comment appelle-t-on le point I ?

3) Quelle est la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la tangente T sur $[-1\,;1]$? sur $[1\,;4]$? Justifier à l'aide de la question 2.

4) On admet que f est deux fois dérivable sur $[-1\,;4]$ et que $f''(x) = (x-1)\,\mathrm{e}^{-x}$. Retrouver par le calcul les résultats de la question 2.

Exercice 5 — La loi de Moore

5 points

En 1965, l'ingénieur Gordon Moore prévoit que le nombre de transistors que l'on peut graver sur un microprocesseur doublera environ tous les deux ans. Le tableau donne, pour sept microprocesseurs commercialisés entre 1971 et 2016, le rang t de l'année ($t = 0$ en 1970) et le nombre N de transistors, en milliers. *Valeurs arrondies.*

Année	1971	1978	1985	1993	2000	2008	2016
t_i	1	8	15	23	30	38	46
N_i (milliers de transistors)	2,3	29	275	3 100	42 000	731 000	7 200 000
$z_i = \ln N_i$	0,833		5,617	8,039		13,502	

Partie A — Un ajustement exponentiel

1) Par combien le nombre de transistors a-t-il été multiplié entre 1971 et 2016 (donner un ordre de grandeur) ? Expliquer pourquoi un ajustement affine du nuage de points $(t_i\,;N_i)$ n'est pas adapté.

2) Recopier et compléter le tableau : les trois valeurs manquantes de $z_i = \ln N_i$ seront arrondies au millième.

3) À l'aide de la calculatrice, donner une équation de la droite de régression de z en t par la méthode des moindres carrés, sous la forme $z = at + b$ (a arrondi au millième, b au centième), ainsi que le coefficient de corrélation r (arrondi au dix-millième). Que peut-on dire de la qualité de cet ajustement ?

4) En déduire que le nombre de transistors peut être modélisé par $N(t) = 1{,}77\,\mathrm{e}^{0{,}334\,t}$ (en milliers).

5) Déterminer la durée T, en années, au bout de laquelle N est multiplié par 2 selon ce modèle, c'est-à-dire telle que $\mathrm{e}^{0{,}334\,T} = 2$ (arrondir au dixième). La prévision de Gordon Moore est-elle

vérifiée sur la période 1971-2016 ?

Partie B — Jusqu'où ?

6) Estimer, selon ce modèle, le nombre de transistors d'un microprocesseur en 2026, en milliards (arrondir à l'unité). En 2024, un processeur destiné à l'intelligence artificielle compte 208 milliards de transistors : commenter.

7) Des physiciens estiment qu'un microprocesseur ne pourra jamais contenir plus de 10^{14} transistors, soit 10^{11} milliers. Déterminer par le calcul l'année à partir de laquelle le modèle dépasse ce plafond. Expliquer pourquoi cette prévision doit être considérée avec prudence.

Exercice 6 — Tour d'horizon

4 points

Pour chaque question, une seule des réponses proposées est exacte. Indiquer sur la copie la lettre de la réponse choisie et **justifier brièvement**. Une réponse fausse ou absente ne retire aucun point.

1) La suite (u_n) est définie par $u_0 = 10$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}5\,u_n + 3$. Cette suite :

a) a pour limite 3 b) a pour limite 10 c) a pour limite 6 d) n'a pas de limite

2) La courbe de la fonction $x \longmapsto \dfrac{2x+1}{x-3}$, définie sur $]3\,;+\infty[$, admet pour asymptotes les droites d'équations :

a) $x = 3$ et $y = 2$ b) $x = -3$ et $y = 2$ c) $x = 3$ et $y = -\dfrac{1}{3}$ d) $x = 2$ et $y = 3$

3) La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\,\mathrm{e}^{2x}$ a pour dérivée :

a) $g'(x) = 2\,\mathrm{e}^{2x}$ b) $g'(x) = (1+2x)\,\mathrm{e}^{2x}$

c) $g'(x) = (1+x)\,\mathrm{e}^{2x}$ d) $g'(x) = 2x\,\mathrm{e}^{2x}$

4) L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ est égale à :

a) $\ln 2$ b) 2 c) $\mathrm{e} - 1$ d) 1

5) La variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}5$. Alors $P(X \leqslant 2)$ est égale à :

a) e^{-1} b) $1 - \mathrm{e}^{-1}$ c) $0{,}5$ d) $1 - \mathrm{e}^{-4}$