Exercice 1

4,5 points

Partie A — À partir des mesures

1) Chaque trapèze a pour « hauteur » la durée 2 h séparant deux mesures et pour bases les deux concentrations mesurées. L'aire d'un trapèze de bases b et b' et de hauteur h vaut $\dfrac{(b+b')\,h}{2}$; ici $h = 2$, donc chaque trapèze a pour aire $b + b'$. En additionnant les six trapèzes (le premier, de petite base 0, est en fait un triangle d'aire $\frac{2\times 4{,}7}{2} = 4{,}7$, ce qui est bien la valeur $0 + 4{,}7$ donnée par la formule) :

$$A = (0+4{,}7) + (4{,}7+3{,}5) + (3{,}5+2{,}2) + (2{,}2+1{,}4) + (1{,}4+0{,}8) + (0{,}8+0{,}5)$$

Chaque mesure intermédiaire compte deux fois et les mesures extrêmes une fois :

$$A = 0 + 2\times(4{,}7+3{,}5+2{,}2+1{,}4+0{,}8) + 0{,}5 = 2\times 12{,}6 + 0{,}5, \qquad \boxed{A = 25{,}7 \text{ mg}\cdot\text{h/L}}.$$

Partie B — À partir d'un modèle

1) **a.** $C(2) = 10\left(\mathrm{e}^{-0{,}5} - \mathrm{e}^{-2}\right) \approx 10\,(0{,}606\,5 - 0{,}135\,3)$, soit $\boxed{C(2) \approx 4{,}7 \text{ mg/L}}$: le modèle redonne la mesure du tableau au dixième près.

b. Pour $t \in [0\,;12]$, on a $t \geqslant 0$ donc $-0{,}25t \geqslant -t$ (on multiplie $0{,}25 \leqslant 1$ par $t \geqslant 0$, puis on passe aux opposés). La fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, donc $\mathrm{e}^{-0{,}25t} \geqslant \mathrm{e}^{-t}$, c'est-à-dire $\mathrm{e}^{-0{,}25t} - \mathrm{e}^{-t} \geqslant 0$. En multipliant par $10 > 0$: $\boxed{C(t) \geqslant 0 \text{ pour tout } t \in [0\,;12]}$.

c. Une primitive de $t \longmapsto \mathrm{e}^{at}$ $(a \neq 0)$ est $t \longmapsto \dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{at}$. Donc une primitive de $t \longmapsto \mathrm{e}^{-0{,}25t}$ est $t \longmapsto \dfrac{1}{-0{,}25}\mathrm{e}^{-0{,}25t} = -4\,\mathrm{e}^{-0{,}25t}$ et une primitive de $t \longmapsto \mathrm{e}^{-t}$ est $t \longmapsto -\mathrm{e}^{-t}$. Par linéarité :

$$F(t) = 10\left(-4\,\mathrm{e}^{-0{,}25t} + \mathrm{e}^{-t}\right), \qquad \boxed{F(t) = -40\,\mathrm{e}^{-0{,}25t} + 10\,\mathrm{e}^{-t}}.$$

Vérification : $F'(t) = -40\times(-0{,}25)\,\mathrm{e}^{-0{,}25t} + 10\times(-1)\,\mathrm{e}^{-t} = 10\,\mathrm{e}^{-0{,}25t} - 10\,\mathrm{e}^{-t} = C(t)$.

d. La fonction C est continue et positive sur $[0\,;12]$: l'intégrale I est l'aire sous la courbe. Avec la primitive F :

$$I = F(12) - F(0) = \left(-40\,\mathrm{e}^{-3} + 10\,\mathrm{e}^{-12}\right) - (-40+10), \qquad \boxed{I = 30 - 40\,\mathrm{e}^{-3} + 10\,\mathrm{e}^{-12}}.$$

À la calculatrice, $I \approx 30 - 1{,}991\,5 + 0{,}000\,06$, soit $\boxed{I \approx 28{,}0 \text{ mg}\cdot\text{h/L}}$.

L'estimation par les trapèzes $(25{,}7)$ est inférieure d'environ $2{,}3$ mg·h/L. Entre $t = 0$ et $t = 2$, la concentration monte très vite puis atteint son maximum (vers $t \approx 1{,}8$ h d'après la courbe), mais aucune mesure n'est faite à ce moment-là : le segment qui relie les points $(0\,;0)$ et $(2\,;4{,}7)$ passe nettement *sous* la courbe et le premier trapèze oublie une partie de l'aire. Les mesures toutes les deux heures sous-estiment donc l'exposition réelle ; il faudrait mesurer plus souvent au début.

2) La valeur moyenne de C sur $[0\,;12]$ est

$$m = \frac{1}{12-0}\int_0^{12} C(t)\,\mathrm{d}t = \frac{I}{12} \approx \frac{28{,}008\,6}{12}, \qquad \boxed{m \approx 2{,}33 \text{ mg/L}}.$$

Sur les douze heures qui suivent la prise, la concentration moyenne de l'antibiotique dans le sang est d'environ $2{,}33$ mg/L, ce qui dépasse le seuil de 2 mg/L. Conclusion : selon ce modèle, l'antibiotique est efficace.

Exercice 2

10 points

1) Affirmation 1 : VRAIE.

Suite constante solution. Une suite constante égale à ℓ vérifie la relation si $\ell = 0{,}8\,\ell + 60$, soit $0{,}2\,\ell = 60$ et $\ell = 300$.

Suite auxiliaire. Pour tout entier naturel n, posons $v_n = u_n - 300$. Alors

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 300 = 0{,}8\,u_n + 60 - 300 = 0{,}8\,u_n - 240 = 0{,}8\,(u_n - 300) = 0{,}8\,v_n.$$

La suite (v_n) est géométrique de raison $0{,}8$ et de premier terme $v_0 = 500 - 300 = 200$, donc $v_n = 200 \times 0{,}8^{\,n}$ et

$$u_n = 300 + 200 \times 0{,}8^{\,n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Limite. Comme $0 < 0{,}8 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}8^{\,n} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 200 \times 0{,}8^{\,n} = 0$ et, par somme, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 300}$. L'affirmation est vraie.

2) Affirmation 2 : FAUSSE.

Contre-exemple. On a $f(0) = (0-3)\,\mathrm{e}^0 = -3$ et $f(1) = (1-3)\,\mathrm{e}^1 = -2\mathrm{e} \approx -5{,}44$. Ainsi $0 < 1$ mais $f(0) > f(1)$: la fonction f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$. L'affirmation est fausse.

Pour aller plus loin (sens de variation). f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit, avec $u(x) = x^2 - 3$, $u'(x) = 2x$, $v(x) = \mathrm{e}^x$, $v'(x) = \mathrm{e}^x$:

$$f'(x) = 2x\,\mathrm{e}^x + (x^2-3)\,\mathrm{e}^x = (x^2 + 2x - 3)\,\mathrm{e}^x = (x+3)(x-1)\,\mathrm{e}^x.$$

Comme $\mathrm{e}^x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $(x+3)(x-1)$, négatif sur $]-3\,;1[$: f est décroissante sur $[-3\,;1]$ (et croissante sur $]-\infty\,;-3]$ et sur $[1\,;+\infty[$), ce qui confirme le contre-exemple.

3) Affirmation 3 : FAUSSE.

Ensemble de définition. L'équation n'a de sens que si $x > 0$ et $x - 3 > 0$, c'est-à-dire pour $x \in]3\,;+\infty[$.

Résolution. Pour $x > 3$, d'après la relation $\ln a + \ln b = \ln(ab)$:

$$\ln(x) + \ln(x-3) = \ln(10) \iff \ln\big(x(x-3)\big) = \ln(10) \iff x(x-3) = 10 \iff x^2 - 3x - 10 = 0$$

car la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ (deux réels strictement positifs ayant le même logarithme sont égaux). Le discriminant vaut $\Delta = 9 + 40 = 49 = 7^2$, d'où les racines $x_1 = \dfrac{3-7}{2} = -2$ et $x_2 = \dfrac{3+7}{2} = 5$.

Or $-2 \notin]3\,;+\infty[$: cette valeur n'est pas solution de l'équation de départ ($\ln(-2)$ n'existe pas). Seule $x = 5$ convient ; *vérification :* $\ln 5 + \ln 2 = \ln 10$. L'équation admet une seule solution et non deux :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{5\}}$$ l'affirmation est fausse.

4) Affirmation 4 : VRAIE.

La fonction h est deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$:

$$h'(x) = 2x - \frac{8}{x} \qquad \text{et} \qquad h''(x) = 2 + \frac{8}{x^2}.$$

Pour tout $x > 0$, $x^2 > 0$ donc $\dfrac{8}{x^2} > 0$ et $h''(x) > 2 > 0$. La dérivée seconde est strictement positive sur $]0\,;+\infty[$, donc $\boxed{h \text{ est convexe sur }]0\,;+\infty[}$: l'affirmation est vraie.

Remarque. h n'est pas monotone (h' s'annule en $x = 2$, où h atteint son minimum $4 - 8\ln 2 \approx -1{,}55$) : convexe ne veut pas dire croissante.

5) Affirmation 5 : VRAIE.

Condition initiale. $g(0) = 4 - 2\,\mathrm{e}^{0} = 4 - 2 = 2$.

g est solution de (E). Pour tout réel t, $g'(t) = -2 \times (-3)\,\mathrm{e}^{-3t} = 6\,\mathrm{e}^{-3t}$, et

$$-3\,g(t) + 12 = -3\left(4 - 2\,\mathrm{e}^{-3t}\right) + 12 = -12 + 6\,\mathrm{e}^{-3t} + 12 = 6\,\mathrm{e}^{-3t} = g'(t).$$

Donc g est solution de (E).

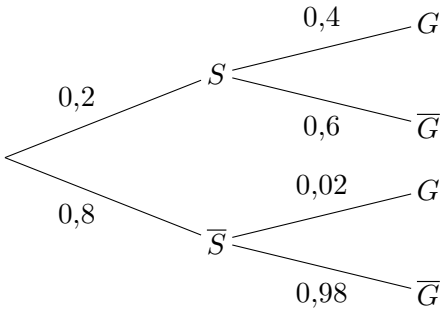
Unicité. L'équation (E) est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -3$ et $b = 12$; la solution constante est $y = -\dfrac{b}{a} = 4$ et les solutions de (E) sont toutes les fonctions $t \longmapsto 4 + K\,\mathrm{e}^{-3t}$, $K \in \mathbb{R}$. La condition $y(0) = 2$ impose $4 + K = 2$, soit $K = -2$: il y a une seule solution vérifiant cette condition, et c'est g. $\boxed{\text{L'affirmation est vraie.}}$

Exercice 3

5,5 points

Partie A — Un premier indice, puis un second

1) D'après l'énoncé, $P(S) = 0{,}2$ donc $P(\overline{S}) = 0{,}8$; $P_S(G) = 0{,}4$ et $P_S(\overline{G}) = 0{,}6$; $P_{\overline{S}}(G) = 0{,}02$ et $P_{\overline{S}}(\overline{G}) = 0{,}98$.



2) On cherche $P(S \cap G)$. Le long de la branche S puis G :

$$P(S \cap G) = P(S) \times P_S(G) = 0{,}2 \times 0{,}4, \qquad \boxed{P(S \cap G) = 0{,}08}.$$

3) S et $\overline{S}$ forment une partition de l'univers ; d'après la formule des probabilités totales :

$$P(G) = P(S \cap G) + P(\overline{S} \cap G) = 0{,}08 + 0{,}8 \times 0{,}02 = 0{,}08 + 0{,}016, \qquad \boxed{P(G) = 0{,}096}.$$

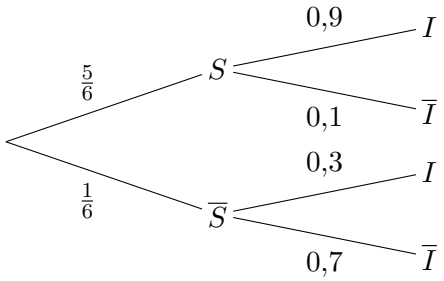
4) On cherche la probabilité *a posteriori* $P_G(S)$. Comme $P(G) = 0{,}096 \neq 0$:

$$P_G(S) = \frac{P(S \cap G)}{P(G)} = \frac{0{,}08}{0{,}096} = \frac{80}{96} = \frac{5}{6}, \qquad \boxed{P_G(S) = \frac{5}{6} \approx 0{,}833}.$$

Sachant qu'un message contient le mot *gratuit*, il y a donc environ $83\,\%$ de chances que ce soit un spam.

Les deux probabilités ne portent pas sur la même chose : $P_S(G) = 0{,}4$ est la proportion de messages contenant *gratuit* **parmi les spams**, alors que $P_G(S)$ est la proportion de spams **parmi les messages qui contiennent *gratuit*** ; c'est l'inversion du conditionnement (formule de Bayes), et les deux valeurs n'ont aucune raison d'être égales.

5) On raisonne parmi les messages qui contiennent le mot *gratuit*. Pour un tel message, la probabilité *a priori* d'être un spam est maintenant $P(S) = \frac{5}{6}$ (résultat de la question 4) et $P(\overline{S}) = \frac{1}{6}$. On note I l'évènement « le message provient d'un expéditeur inconnu » : $P_S(I) = 0{,}9$ et $P_{\overline{S}}(I) = 0{,}3$.



Probabilités totales : $P(I) = \frac{5}{6} \times 0{,}9 + \frac{1}{6} \times 0{,}3 = 0{,}75 + 0{,}05 = 0{,}8$. Puis

$$P_I(S) = \frac{P(S \cap I)}{P(I)} = \frac{0{,}75}{0{,}8} = \frac{75}{80} = \frac{15}{16}, \qquad \boxed{P_I(S) = \frac{15}{16} = 0{,}937\,5}.$$

Comme $0{,}937\,5 \geqslant 0{,}9$, le filtre bloque ce message. Chaque indice observé a fait monter la probabilité que le message soit un spam : $0{,}2$ au départ, $\frac{5}{6} \approx 0{,}83$ après le mot *gratuit*, puis $0{,}937\,5$ après l'expéditeur inconnu.

Partie B — Le courrier d'une journée

1) On répète 50 fois, de façon indépendante (hypothèse de l'énoncé), la même épreuve de Bernoulli « le message est un spam », de probabilité de succès $p = 0{,}2$; X compte le nombre de succès. Donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(50\,;\,0{,}2)$.

Son espérance est $E(X) = np = 50 \times 0{,}2$, soit $\boxed{E(X) = 10}$: sur un grand nombre de journées, l'association reçoit en moyenne 10 spams par jour.

2) À la calculatrice (loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}2$) :

$$P(X = 10) = \binom{50}{10} 0{,}2^{10}\, 0{,}8^{40} \approx 0{,}140, \qquad \boxed{P(X = 10) \approx 0{,}140}.$$

L'évènement « au moins 15 spams » est le contraire de « au plus 14 spams » :

$$P(X \geqslant 15) = 1 - P(X \leqslant 14) \approx 1 - 0{,}939, \qquad \boxed{P(X \geqslant 15) \approx 0{,}061}.$$

3) On lit les probabilités cumulées à la calculatrice : $P(X \leqslant 14) \approx 0{,}939 < 0{,}95$ et $P(X \leqslant 15) \approx 0{,}969 \geqslant 0{,}95$. Le plus petit entier cherché est donc $\boxed{k = 15}$.

Interprétation : dans au moins $95\,\%$ des journées, l'association reçoit au plus 15 spams. Une journée avec 16 spams ou plus est inhabituelle (probabilité d'environ $3\,\%$) : elle peut signaler une campagne de spams et mériter une vérification du filtre.