Calculatrice autorisée (mode examen)
Toutes les réponses doivent être justifiées, sauf mention contraire.

Exercice 1

4,5 points

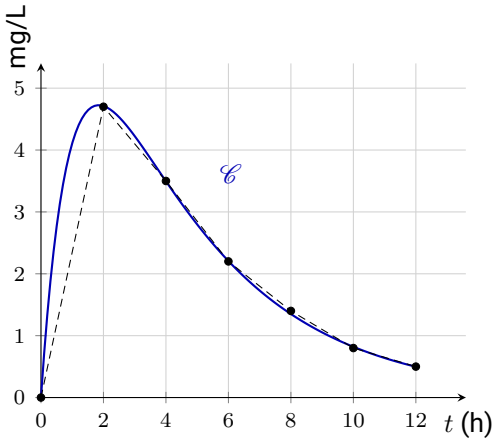
Un antibiotique est pris par voie orale en une seule prise, à l'instant $t = 0$. Sa concentration dans le sang, en milligrammes par litre (mg/L), est mesurée toutes les deux heures pendant douze heures :

Temps t (en heures)	0	2	4	6	8	10	12
Concentration (en mg/L)	0	4,7	3,5	2,2	1,4	0,8	0,5

En pharmacologie, l'*exposition* de l'organisme au médicament est mesurée par l'aire du domaine situé sous la courbe de concentration entre $t = 0$ et $t = 12$, exprimée en mg·h/L.

Partie A — À partir des mesures

1) Pour estimer cette aire, on relie les points de mesure successifs par des segments (ligne pointillée ci-contre) et on calcule l'aire des six trapèzes ainsi formés (le premier est en fait un triangle). Calculer cette estimation.



Partie B — À partir d'un modèle

On modélise la concentration à l'instant t (en heures), pour $t \in [0\,;12]$, par

$$C(t) = 10\left(\mathrm{e}^{-0{,}25t} - \mathrm{e}^{-t}\right).$$

La courbe de C est tracée ci-contre.

1) **a.** Calculer $C(2)$, arrondi au dixième, et comparer à la mesure du tableau.

b. Justifier que, pour tout $t \in [0\,;12]$, $C(t) \geqslant 0$.

c. Déterminer une primitive F de la fonction C sur $[0\,;12]$.

d. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{12} C(t)\,\mathrm{d}t$, puis sa valeur arrondie au dixième. Comparer avec l'estimation de la partie A et proposer une explication à l'écart observé.

2) Cet antibiotique est efficace si sa concentration moyenne sur les douze heures qui suivent la prise dépasse 2 mg/L. Calculer la valeur moyenne de C sur $[0\,;12]$, arrondie au centième, puis conclure.

Exercice 2

10 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, puis **justifier** la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 500$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}8\,u_n + 60$.
Affirmation 1 : la suite (u_n) converge vers 300.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 3)\,\mathrm{e}^x$.
Affirmation 2 : la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

3) **Affirmation 3 :** l'équation $\ln(x) + \ln(x-3) = \ln(10)$ admet exactement deux solutions.

4) Soit h la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x) = x^2 - 8\ln(x)$.
Affirmation 4 : la fonction h est convexe sur $]0\,;+\infty[$.

5) On considère l'équation différentielle $(E) : y' = -3y + 12$.
Affirmation 5 : la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = 4 - 2\,\mathrm{e}^{-3t}$ est l'unique solution de (E) qui vérifie $g(0) = 2$.

Exercice 3

5,5 points

Une association reçoit chaque jour de nombreux courriels. Une étude de sa boîte de réception a montré que $20\,\%$ des messages reçus sont des messages indésirables (*spams*), les autres étant des messages légitimes. Pour trier automatiquement le courrier, l'association met au point un filtre fondé sur des indices.

Dans tout l'exercice, les résultats seront donnés sous forme de fraction ou de décimal exact lorsque c'est possible, et arrondis à 10^{-3} sinon.

Partie A — Un premier indice, puis un second

L'étude a montré que le mot « gratuit » figure dans $40\,\%$ des spams et dans $2\,\%$ des messages légitimes. On choisit un message au hasard dans la boîte de réception et on note :

- S l'évènement « le message est un spam » ;
- G l'évènement « le message contient le mot *gratuit* ».

1) Construire un arbre pondéré décrivant la situation.

2) Calculer la probabilité que le message soit un spam contenant le mot « gratuit ».

3) Montrer que $P(G) = 0{,}096$.

4) Le message choisi contient le mot « gratuit ». Calculer la probabilité qu'il s'agisse d'un spam. Expliquer en une phrase pourquoi cette probabilité est différente de $P_S(G)$.

5) Le filtre bloque un message lorsque la probabilité qu'il soit un spam est supérieure ou égale à $0{,}9$. Pour les messages qui contiennent le mot « gratuit », il examine donc un second indice : parmi ces messages, $90\,\%$ des spams et $30\,\%$ des messages légitimes proviennent d'un expéditeur inconnu de l'association.
Un message contient le mot « gratuit » et provient d'un expéditeur inconnu. On admet qu'avant l'examen du second indice, la probabilité que ce message soit un spam est celle calculée à la question 4. Montrer que le filtre bloque ce message.

Partie B — Le courrier d'une journée

L'association reçoit 50 messages dans une journée. On admet que les messages sont indépendants les uns des autres et on note X le nombre de spams parmi ces 50 messages.

1) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres, puis donner son espérance et l'interpréter.

2) Calculer la probabilité de recevoir exactement 10 spams dans la journée, puis celle d'en recevoir au moins 15.

3) Déterminer le plus petit entier k tel que $P(X \leqslant k) \geqslant 0{,}95$. Interpréter ce résultat pour l'association.