Exercice 1

5 points

1) **a.** Après un mois, les intérêts valent $0{,}5\,\%$ de $6\,000$, soit 30 € ; le capital devient $6\,030$ puis, après le remboursement, $u_1 = 6\,030 - 250 = \boxed{5\,780}$.

b. Ajouter $0{,}5\,\%$ revient à multiplier par $1 + \dfrac{0{,}5}{100} = 1{,}005$. Chaque mois, le capital u_n est multiplié par $1{,}005$, puis diminué de 250 : pour tout entier naturel n, $\boxed{u_{n+1} = 1{,}005\,u_n - 250}$.

2) **a.** Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 50\,000 = 1{,}005\,u_n - 250 - 50\,000 = 1{,}005\,u_n - 50\,250 \\ &= 1{,}005\,(u_n - 50\,000) = 1{,}005\,v_n. \end{aligned}$$

(On a utilisé $50\,250 = 1{,}005 \times 50\,000$.) La suite (v_n) est donc $\boxed{\text{géométrique de raison } 1{,}005}$, de premier terme $v_0 = u_0 - 50\,000 = \boxed{-44\,000}$.

b. Pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times 1{,}005^n = -44\,000 \times 1{,}005^n$, et $u_n = v_n + 50\,000$, d'où

$$\boxed{u_n = 50\,000 - 44\,000 \times 1{,}005^n}.$$

c. Comme $1{,}005 > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}005^n = +\infty$. Alors $-44\,000 \times 1{,}005^n$ tend vers $-\infty$ et, en ajoutant $50\,000$, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$.
Une suite qui tend vers $-\infty$ finit par prendre des valeurs négatives : il existe donc un rang n à partir duquel $u_n \leqslant 0$, c'est-à-dire un mois où le capital restant dû est nul ou négatif. Avec des mensualités de 250 €, **le crédit sera donc entièrement remboursé au bout d'un nombre fini de mois** (le modèle cesse d'avoir un sens dès que $u_n \leqslant 0$).

3) Tant que le capital restant dû est strictement positif, on passe au mois suivant (intérêts puis remboursement) et on compte un mois de plus :

```
def duree(u, r, m):
    n = 0
    while u > 0:
        u = u*(1 + r) - m
        n = n + 1
    return n
```

(La condition `u > 0` est la négation de « $u_n \leqslant 0$ » : la boucle s'arrête au premier mois où le capital restant dû est négatif ou nul.)

4) La fonction renvoie le premier entier n tel que $u_n \leqslant 0$: $\boxed{\text{le crédit est remboursé en } 26 \text{ mois}}$, soit un peu plus de deux ans. Les 25 premières mensualités sont de 250 €, la 26^{e} solde le reste.
Contrôle : $u_{25} \approx 157 > 0$ et $u_{26} \approx -92 < 0$.

5) Avec une mensualité de 30 €, la suite vérifie $u_{n+1} = 1{,}005\,u_n - 30$ avec $u_0 = 6\,000$. Or les intérêts du premier mois valent exactement $0{,}5\,\%$ de $6\,000$, soit 30 € : $u_1 = 6\,030 - 30 = 6\,000 = u_0$, et de même $u_2 = 6\,000$, etc. La suite est **constante** égale à $6\,000$: l'étudiant ne rembourse que les intérêts et sa dette ne diminue jamais.
La condition `u > 0` reste donc toujours vraie : $\boxed{\text{le programme ne s'arrête jamais}}$ (boucle infinie).

Exercice 2

3 points

1) VRAI. Pour $x > -1$, $f(x) = \dfrac{x\left(4 - \frac{3}{x}\right)}{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \dfrac{4 - \frac{3}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$ (pour $x \neq 0$). Lorsque x tend vers $+\infty$, $\dfrac{3}{x}$ et $\dfrac{1}{x}$ tendent vers 0, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{4}{1} = 4$: la droite d'équation $y = 4$ est asymptote horizontale.
Lorsque x tend vers -1 par valeurs supérieures, $4x - 3$ tend vers -7 et $x + 1$ tend vers 0 en restant positif, donc, par quotient, $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$: la droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale.
Sur $]-1\,;+\infty[$, f est définie et continue (pas d'autre asymptote verticale) et l'intervalle n'a qu'une seule borne infinie : $\boxed{\text{la courbe admet exactement ces deux asymptotes}}$.

2) FAUX. Le théorème des valeurs intermédiaires garantit *au moins* une solution, mais pas une seule : il faudrait de plus que g soit strictement monotone. *Contre-exemple :* la fonction g définie sur $[0\,;1]$ par

$$g(x) = (4x - 1)(2x - 1)(4x - 3)$$

est continue (polynôme), avec $g(0) = (-1) \times (-1) \times (-3) = -3$ et $g(1) = 3 \times 1 \times 1 = 3$; pourtant l'équation $g(x) = 0$ admet **trois** solutions dans $[0\,;1]$: $\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{3}{4}$. $\boxed{\text{L'affirmation est fausse.}}$
Remarque : une courbe continue allant de -3 à 3 et coupant trois fois l'axe des abscisses suffit comme contre-exemple (un dessin est accepté).

3) VRAI. Posons $h(x) = x^3 + 2x - 1$ sur $\mathbb{R}$; l'équation s'écrit $h(x) = 0$.
h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = 3x^2 + 2 > 0$ pour tout réel x : h est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.
De plus h est continue, $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$ (limite de x^3). D'après le théorème des valeurs intermédiaires (cas strictement monotone), l'équation $h(x) = 0$ admet une **unique** solution α dans $\mathbb{R}$.
Enfin $h(0) = -1 < 0$ et $h\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{8} + 1 - 1 = \dfrac{1}{8} > 0$: comme h est strictement croissante, α est compris entre 0 et $\dfrac{1}{2}$, soit $\boxed{0 < \alpha < \dfrac{1}{2}}$. *(En fait $\alpha \approx 0{,}45$.)*

Exercice 3

8 points

Partie A. Les tangentes à la courbe logarithmique

1) La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, de dérivée $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$. La tangente en $A\,(a\,;\ln a)$ a pour coefficient directeur $\dfrac{1}{a}$ et pour équation

$$y = \frac{1}{a}(x - a) + \ln a = \frac{1}{a}x - 1 + \ln a, \qquad \text{soit} \qquad \boxed{y = \frac{1}{a}x + \ln a - 1}.$$

2) H est sur l'axe des ordonnées avec la même ordonnée que A : $\boxed{H\,(0\,;\ln a)}$. K est le point de T_a d'abscisse 0 : $y_K = \dfrac{1}{a} \times 0 + \ln a - 1$, donc $\boxed{K\,(0\,;\ln a - 1)}$.

Les deux points sont sur l'axe des ordonnées et $y_H > y_K$:

$$HK = y_H - y_K = \ln a - (\ln a - 1) = \boxed{1}.$$

La longueur HK, appelée « sous-tangente », vaut 1 **quel que soit** $a > 0$: c'est la propriété découverte au XVII$^{\text{e}}$ siècle.

3) Pour $a = 4$: $y_K = \ln 4 - 1$. Or $4 = 2^2$, donc $\ln 4 = \ln\left(2^2\right) = 2\ln 2$, et $\boxed{K\,(0\,;2\ln 2 - 1)}$. *(Avec $\ln 2 \approx 0{,}69$: $y_K \approx 0{,}38$, cohérent avec la figure.)*

4) T_a passe par $O(0\,;0)$ si et seulement si $y_K = 0$:

$$\ln a - 1 = 0 \iff \ln a = 1 \iff a = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}.$$

La seule tangente à $\mathscr{C}$ passant par l'origine est la tangente au point d'abscisse $\boxed{a = \mathrm{e}}$; son équation est $y = \dfrac{1}{\mathrm{e}}\,x + \ln \mathrm{e} - 1 = \dfrac{1}{\mathrm{e}}\,x$, soit $\boxed{y = \dfrac{x}{\mathrm{e}}}$.

Partie B. Position de la courbe par rapport à cette tangente

1) g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables ($\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ est une constante) :

$$g'(x) = \frac{1}{\mathrm{e}} - \frac{1}{x} = \frac{x}{\mathrm{e}\,x} - \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}\,x} = \boxed{\frac{x - \mathrm{e}}{\mathrm{e}\,x}}.$$

2) Pour $x > 0$, $\mathrm{e}\,x > 0$: $g'(x)$ est du signe de $x - \mathrm{e}$, négatif sur $]0\,;\mathrm{e}[$, nul en e, positif sur $]\mathrm{e}\,;+\infty[$. De plus

$$g(\mathrm{e}) = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}} - \ln \mathrm{e} = 1 - 1 = \boxed{0}.$$

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
g	‖	↘	0	↗	

3) D'après le tableau, g admet en e son minimum, qui vaut 0 : pour tout $x > 0$, $g(x) \geqslant 0$, c'est-à-dire $\dfrac{x}{\mathrm{e}} - \ln x \geqslant 0$, soit

$$\boxed{\ln x \leqslant \frac{x}{\mathrm{e}} \quad \text{pour tout } x > 0}.$$

Interprétation : $y = \dfrac{x}{\mathrm{e}}$ est l'équation de la tangente T_{e} trouvée en A.4. L'inégalité signifie que **la courbe $\mathscr{C}$ est entièrement située en dessous de la tangente** T_{e}, qu'elle ne touche qu'au point d'abscisse e (où g s'annule).

Partie C. Une valeur approchée de $\ln 4{,}2$

1) D'après A.1 et A.3, T_4 a pour équation $y = \dfrac{x}{4} + 2\ln 2 - 1$. Pour $x = 4{,}2$:

$$y = \frac{4{,}2}{4} + 2\ln 2 - 1 = 1{,}05 + 2\ln 2 - 1 = \boxed{2\ln 2 + 0{,}05}.$$

Près du point de contact A, la tangente est très proche de la courbe, donc $\ln 4{,}2 \approx 2\ln 2 + 0{,}05 \approx 2 \times 0{,}69 + 0{,}05$, soit $\boxed{\ln 4{,}2 \approx 1{,}43}$.
La courbe $\mathscr{C}$ est en dessous de la tangente T_4 : au point d'abscisse $4{,}2$, l'ordonnée $\ln 4{,}2$ du point de la courbe est **inférieure** à l'ordonnée $2\ln 2 + 0{,}05$ du point de la tangente. La valeur approchée obtenue est donc $\boxed{\text{par excès}}$.
(Pour information : $\ln 4{,}2 \approx 1{,}4351$ et $2\ln 2 + 0{,}05 \approx 1{,}4363$; l'écart est d'environ 10^{-3}.)

Exercice 4

3 points

1) $g = u \times v$ avec $u(x) = 1 - x$, $u'(x) = -1$, $v(x) = \mathrm{e}^x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$:

$$g'(x) = (-1) \times \mathrm{e}^x + (1 - x) \times \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(-1 + 1 - x) = \boxed{-x\,\mathrm{e}^x}.$$

Comme $\mathrm{e}^x > 0$, $g'(x)$ est du signe de $-x$: positif pour $x < 0$, nul en 0, négatif pour $x > 0$. Et $g(0) = 1 \times \mathrm{e}^0 = 1$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g		↗	1	↘	

La fonction g admet donc un $\boxed{\text{maximum égal à } 1, \text{ atteint en } x = 0}$.

2) $h = \mathrm{e}^u$ avec $u(x) = x^2 - 2x$ et $u'(x) = 2x - 2$, donc $h'(x) = u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)} = \boxed{(2x-2)\,\mathrm{e}^{x^2-2x}}$.
Comme $\mathrm{e}^{x^2-2x} > 0$, $h'(x)$ est du signe de $2x - 2$: h est décroissante sur $]-\infty\,;1]$ et croissante sur $[1\,;+\infty[$. Elle admet donc un minimum en $x = 1$:

$$h(1) = \mathrm{e}^{1-2} = \boxed{\mathrm{e}^{-1}} = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Exercice 5

1 point

La boîte a pour hauteur x et pour base un carré de côté $24 - 2x$; pour qu'elle existe, il faut $0 < x < 12$. Son volume, en cm^3, est

$$V(x) = x\,(24 - 2x)^2.$$

Quelques essais : $V(3) = 3 \times 18^2 = 972$, $V(4) = 4 \times 16^2 = 1\,024$, $V(5) = 5 \times 14^2 = 980$. Le volume semble maximal autour de $x = 4$, avec $1\,024$ cm^3, c'est-à-dire $1{,}024$ L : moins que $1{,}1$ L. Pour conclure, on étudie les variations de V.

$V = u \times w$ avec $u(x) = x$ et $w(x) = (24 - 2x)^2$, $w'(x) = 2 \times (-2)(24 - 2x) = -4(24 - 2x)$:

$$V'(x) = (24 - 2x)^2 + x \times (-4(24 - 2x)) = (24 - 2x)\,[(24 - 2x) - 4x] = (24 - 2x)(24 - 6x).$$

Sur $]0\,;12[$, $24 - 2x > 0$, donc $V'(x)$ est du signe de $24 - 6x$: positif pour $x < 4$, nul en 4, négatif pour $4 < x < 12$.

x	0		4		12
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
V	0	↗	$1\,024$	↘	0

Le volume maximal est $V(4) = 1\,024$ cm$^3 = 1{,}024$ L, obtenu pour des carrés de 4 cm de côté (boîte de $16 \times 16 \times 4$ cm). Comme $1{,}024 < 1{,}1$:

Non : aucune valeur de x ne donne une boîte de plus de $1{,}1$ litre.