Devoir commun de mathématiques — Terminale, option maths complémentaires
Durée : 2 heures Calculatrice interdite

Exercice 1

5 points

Pour acheter une voiture d'occasion, un étudiant emprunte $6\,000$ € à sa banque. Chaque mois, la banque ajoute au capital restant dû des intérêts de $0{,}5\,\%$, puis l'étudiant rembourse 250 €.

Pour tout entier naturel n, on note u_n le capital restant dû, en euros, après n mois. Ainsi $u_0 = 6\,000$.

1) **a.** Calculer u_1.

b. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}005\,u_n - 250$.

2) On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 50\,000$.

a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $1{,}005$ et préciser son premier terme v_0.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 50\,000 - 44\,000 \times 1{,}005^n$.

c. Déterminer la limite de la suite $(1{,}005^n)$, puis celle de la suite (u_n). Pourquoi ce résultat garantit-il que le crédit sera remboursé en un nombre fini de mois ?

3) On veut connaître le nombre de mois nécessaires pour rembourser entièrement le crédit. La fonction Python ci-contre reçoit le capital emprunté `u`, le taux mensuel `r` (ici $0{,}005$) et la mensualité `m` ; elle doit renvoyer le premier entier n tel que $u_n \leqslant 0$. Recopier et compléter les deux lignes incomplètes.

```
def duree(u, r, m):
    n = 0
    while ... :
        u = ...
        n = n + 1
    return n
```

4) L'appel `duree(6000, 0.005, 250)` renvoie 26. Interpréter ce résultat dans le contexte.

5) Que se passe-t-il si l'on exécute `duree(6000, 0.005, 30)` ? Expliquer à l'aide de la suite (u_n) correspondante.

Exercice 2

3 points

Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse et **justifier** la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1) Soit f la fonction définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x-3}{x+1}$.
Affirmation : « La courbe représentative de f admet exactement deux asymptotes : la droite d'équation $x = -1$ et la droite d'équation $y = 4$. »

2) *Affirmation :* « Si une fonction g est continue sur $[0\,;1]$ avec $g(0) = -3$ et $g(1) = 3$, alors l'équation $g(x) = 0$ admet exactement une solution dans $[0\,;1]$. »

3) *Affirmation :* « L'équation $x^3 + 2x = 1$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, et $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$. »

Exercice 3

8 points

Au XVII^{e} siècle, peu après l'invention des logarithmes par Neper, des mathématiciens comme Torricelli et Huygens étudient la **courbe logarithmique** et découvrent une propriété remarquable de ses tangentes : c'est l'objet de cet exercice.

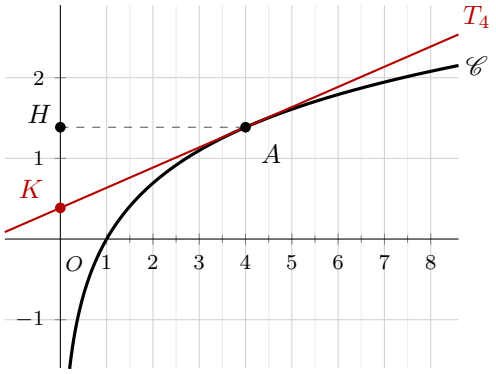
Données utiles : $\mathrm{e} \approx 2{,}72$ $\qquad \ln 2 \approx 0{,}69$

Dans un repère orthonormé, on note $\mathscr{C}$ la courbe de la fonction $\ln$, définie sur $]0\,;+\infty[$. Pour tout réel $a > 0$, on note A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse a et T_a la tangente à $\mathscr{C}$ en A. La droite T_a coupe l'axe des ordonnées en un point K ; on note H le point de l'axe des ordonnées qui a la même ordonnée que A. La figure ci-dessous correspond à $a = 4$.

Partie A. Les tangentes à la courbe logarithmique

1) Montrer que, pour tout réel $a > 0$, la tangente T_a a pour équation $y = \dfrac{1}{a}x + \ln a - 1$.

2) Donner les coordonnées des points H et K en fonction de a. Montrer que la longueur HK ne dépend pas de a et préciser sa valeur. *(C'est la propriété découverte au XVII^{e} siècle : la longueur HK, appelée « sous-tangente », est constante.)*



3) Pour $a = 4$, montrer que le point K a pour coordonnées $(0\,;\,2\ln 2 - 1)$.

4) Déterminer la valeur de a pour laquelle la tangente T_a passe par l'origine O du repère. Donner alors une équation de cette tangente.

Partie B. Position de la courbe par rapport à cette tangente

On considère la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}} - \ln x$.

1) Calculer $g'(x)$ et montrer que, pour tout $x > 0$, $g'(x) = \dfrac{x - \mathrm{e}}{\mathrm{e}\,x}$.

2) Étudier le signe de $g'(x)$ et dresser le tableau de variations de g sur $]0\,;+\infty[$ (les limites ne sont pas demandées). Calculer $g(\mathrm{e})$.

3) En déduire que, pour tout réel $x > 0$, $\ln x \leqslant \dfrac{x}{\mathrm{e}}$. Interpréter graphiquement ce résultat à l'aide de la question A.4.

Partie C. Une valeur approchée de $\ln 4{,}2$

On admet que la courbe $\mathscr{C}$ est située en dessous de la tangente T_4.

1) Déterminer l'ordonnée du point de la tangente T_4 d'abscisse $4{,}2$. En déduire une valeur approchée de $\ln 4{,}2$ et dire si elle est par excès ou par défaut.

Exercice 4

3 points

Les questions sont indépendantes.

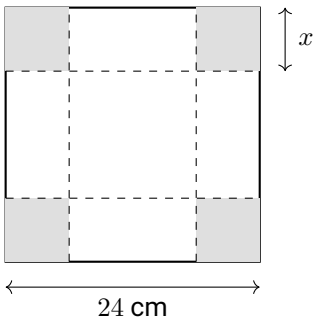
1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (1 - x)\,\mathrm{e}^{x}$. Montrer que, pour tout réel x, $g'(x) = -x\,\mathrm{e}^{x}$, puis dresser le tableau de variations de g (les limites ne sont pas demandées). Préciser le maximum de g.

2) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \mathrm{e}^{x^2-2x}$. Calculer $h'(x)$ et déterminer la valeur exacte du minimum de h sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5

1 point

Dans une feuille de carton carrée de 24 cm de côté, on découpe aux quatre coins des carrés identiques de côté x cm, puis on relève les bords pour former une boîte sans couvercle (figure ci-dessous).



Peut-on, en choisissant convenablement x, obtenir une boîte dont le volume dépasse $1{,}1$ litre ? Argumenter. *Toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte.*