Exercice 1 (25 min)

6 points

1) `random()` renvoie un nombre au hasard de $[0\,;1[$: $\boxed{X \text{ suit la loi uniforme sur } [0\,;1]}$. Pour cette loi, la probabilité d'un intervalle est sa longueur :

$\boxed{P(X \leqslant 0{,}3) = 0{,}3}$ et $P(0{,}25 \leqslant X \leqslant 0{,}75) = 0{,}75 - 0{,}25$, $\boxed{P(0{,}25 \leqslant X \leqslant 0{,}75) = 0{,}5}$.

2) **a.** L'aire d'un disque de rayon 1 est $\pi \times 1^2 = \pi$; celle du quart de disque est donc $\dfrac{\pi}{4}$. Le carré a pour aire 1 et la probabilité est proportionnelle à l'aire :

$$p = \frac{\text{aire du quart de disque}}{\text{aire du carré}} = \frac{\pi/4}{1}, \qquad \boxed{p = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785}.$$

b. $M(x\,;y)$ appartient au disque de centre O et de rayon 1 lorsque $OM \leqslant 1$, c'est-à-dire $OM^2 = x^2 + y^2 \leqslant 1$ (les coordonnées étant positives, M est alors dans le quart de disque). La ligne complétée :

```
if x*x + y*y <= 1 :
```

3) À la fin de la boucle, `compteur` est le nombre de points, parmi les n points tirés, qui sont tombés dans le quart de disque : `compteur / n` est la **fréquence** des points tombés dans le quart de disque.
Lorsque n est grand, cette fréquence est proche de la probabilité $p = \dfrac{\pi}{4}$ (c'est ce que l'on observe en répétant un grand nombre de fois une expérience aléatoire). Donc $4 \times \dfrac{\texttt{compteur}}{n} \approx 4 \times \dfrac{\pi}{4} = \pi$: la fonction renvoie une valeur proche de π.

4) $\pi = 3{,}141\,59\ldots$, donc l'écart vaut $\pi - 3{,}136\,8 = 0{,}004\,79\ldots$, soit $\boxed{\text{écart} \approx 0{,}005}$.
Pour améliorer l'estimation, on augmente le nombre n de points tirés (par exemple `estimation(1000000)`) : la fréquence se rapproche de la probabilité.

5) Si $X =$ `random()` est dans $[0\,;1[$, alors $3X$ est dans $[0\,;3[$ et $2 + 3X$ est dans $[2\,;5[$:

```
def uniforme():
    return 2 + 3 * random()
```

La valeur renvoyée est bien comprise entre 2 et 5 ; de plus, multiplier par 3 puis ajouter 2 transforme la loi uniforme sur $[0\,;1]$ en la loi uniforme sur $[2\,;5]$ (chaque sous-intervalle de $[0\,;1]$ est envoyé sur un sous-intervalle de $[2\,;5]$ trois fois plus long, et les probabilités restent proportionnelles aux longueurs).

Exercice 2 (15 min)

4 points

1) Aire de la cible : $40 \times 30 = 1\,200$ cm^2. Aire du disque central : $\pi \times 5^2 = 25\pi$ cm^2. La probabilité est proportionnelle à l'aire :

$$P(\text{disque}) = \frac{25\pi}{1\,200} = \frac{\pi}{48} = 0{,}065\,4\ldots, \qquad \boxed{P(\text{disque}) \approx 0{,}065}.$$

2) La bande des points d'abscisse comprise entre 10 et 30 est un rectangle de largeur $30-10=20$ cm et de hauteur 30 cm, d'aire $20\times 30=600$ cm^2 :

$$P(\text{bande})=\frac{600}{1\,200}=\boxed{0{,}5}.$$

3) **a.** La loi uniforme sur $[0\,;40]$ a pour densité la fonction constante $\boxed{f(x)=\frac{1}{40}}$ sur $[0\,;40]$. « Le palet tombe dans la bande » s'écrit $10\leqslant X\leqslant 30$:

$$P(10\leqslant X\leqslant 30)=\frac{30-10}{40}=\frac{20}{40}=\boxed{0{,}5},$$

ce qui est bien le résultat de la question **2**.

b. $P(X\geqslant 35)=\dfrac{40-35}{40}=\dfrac{5}{40}=\dfrac{1}{8}$, soit $\boxed{P(X\geqslant 35)=0{,}125}$.

c. $E(X)=\dfrac{0+40}{2}$, soit $\boxed{E(X)=20 \text{ cm}}$.
Interprétation : sur un grand nombre de lancers, l'abscisse moyenne du point de chute est 20 cm, c'est-à-dire le milieu de la largeur de la cible.

Exercice 3 (10 min)

3 points

1) *Positivité :* pour $x\in[-1\,;1]$, $x^2\leqslant 1$ donc $1-x^2\geqslant 0$ et $f(x)\geqslant 0$. De plus f est continue (fonction polynôme).

Intégrale : une primitive de $x\longmapsto 1-x^2$ est $x\longmapsto x-\dfrac{x^3}{3}$, donc

$$\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{3}{4}\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\frac{3}{4}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(-1+\frac{1}{3}\right)\right]=\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}=1.$$

La fonction f est positive, continue et d'intégrale 1 sur $[-1\,;1]$:

$$\boxed{f \text{ est une densité de probabilité sur } [-1\,;1]}.$$

2) Par définition, $P(X\leqslant 0)$ est l'aire sous la courbe de f entre -1 et 0 :

$$P(X\leqslant 0)=\int_{-1}^{0}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{3}{4}\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0}=\frac{3}{4}\left[0-\left(-1+\frac{1}{3}\right)\right]=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3},\qquad\boxed{P(X\leqslant 0)=\frac{1}{2}}.$$

(Ce résultat se lit aussi sur la symétrie de la courbe de f par rapport à l'axe des ordonnées.)

3) De même, avec la primitive trouvée à la question **1** :

$$P(-0{,}5\leqslant X\leqslant 0{,}5)=\frac{3}{4}\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-0{,}5}^{0{,}5}=\frac{3}{4}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{24}\right)-\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{24}\right)\right]=\frac{3}{4}\times\frac{22}{24}=\frac{3}{4}\times\frac{11}{12}.$$

$$\boxed{P(-0{,}5\leqslant X\leqslant 0{,}5)=\frac{11}{16}=0{,}687\,5\approx 0{,}688}.$$

Exercice 4 (25 min)

5,5 points

1) Fréquence $=$ $\dfrac{\text{effectif}}{1\,000}$; pour la loi uniforme sur $[0\,;1]$, la probabilité d'une classe de longueur $0{,}2$ est $0{,}2$:

Classe	$[0\,;0{,}2[$	$[0{,}2\,;0{,}4[$	$[0{,}4\,;0{,}6[$	$[0{,}6\,;0{,}8[$	$[0{,}8\,;1[$
Effectif	208	193	201	197	201
Fréquence	0,208	0,193	0,201	0,197	0,201
Probabilité théorique	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

Commentaire : les cinq fréquences observées sont toutes proches de $0{,}2$ (écart au plus $0{,}008$) : la simulation est cohérente avec une loi uniforme, pour laquelle toutes les classes de même longueur ont la même probabilité.

2) Si A suit la loi uniforme sur $[0\,;1]$, alors $5A$ suit la loi uniforme sur $[0\,;5]$: la formule `=5*ALEA()` convient.

3) La courbe de g et l'axe des abscisses délimitent un triangle de base 2 (de 0 à 2) et de hauteur 1 (atteinte en $s = 1$), d'aire $\dfrac{2 \times 1}{2} = 1$. Comme g est de plus positive et continue sur $[0\,;2]$, $\boxed{g \text{ est une densité de probabilité}}$.

4) $P(S \leqslant 0{,}5)$ est l'aire sous la courbe entre 0 et $0{,}5$: un triangle rectangle de base $0{,}5$ et de hauteur $g(0{,}5) = 0{,}5$:

$$P(S \leqslant 0{,}5) = \frac{0{,}5 \times 0{,}5}{2} = \boxed{0{,}125}.$$

$P(0{,}5 \leqslant S \leqslant 1)$ est l'aire sous la courbe entre $0{,}5$ et 1 : un trapèze de hauteur $0{,}5$ dont les bases mesurent $g(0{,}5) = 0{,}5$ et $g(1) = 1$:

$$P(0{,}5 \leqslant S \leqslant 1) = \frac{(0{,}5 + 1) \times 0{,}5}{2} = \boxed{0{,}375}.$$

5) Par symétrie de la courbe par rapport à la droite d'équation $s = 1$, $P(1 \leqslant S \leqslant 1{,}5) = 0{,}375$ et $P(1{,}5 \leqslant S \leqslant 2) = 0{,}125$ (on vérifie : $0{,}125 + 0{,}375 + 0{,}375 + 0{,}125 = 1$).

Classe	$[0\,;0{,}5[$	$[0{,}5\,;1[$	$[1\,;1{,}5[$	$[1{,}5\,;2]$
Effectif	121	377	381	121
Fréquence	0,121	0,377	0,381	0,121
Probabilité théorique	0,125	0,375	0,375	0,125

Commentaire : les fréquences observées sont très proches des probabilités données par la densité g : contrairement à X_1 seul, S prend bien plus souvent des valeurs proches de 1 que des valeurs proches de 0 ou de 2.
La courbe de g est symétrique par rapport à la droite d'équation $s = 1$: les valeurs de S se répartissent de façon symétrique autour de 1, ce qui suggère $\boxed{E(S) = 1}$. (C'est cohérent avec $E(X_1) = E(X_2) = 0{,}5$.)

Exercice 5 (10 min)

1,5 point

Notons X la position du point de cassure, en mètres, à partir d'une extrémité du bâton : X suit la loi uniforme sur $[0\,;1]$. Les deux morceaux mesurent X et $1-X$.

Recherche de la condition. Si $X \leqslant 0{,}5$, le petit morceau mesure X et le grand $1-X$; « le grand mesure plus de trois fois le petit » s'écrit

$$1-X>3X \iff 1>4X \iff X<\frac{1}{4}.$$

Si $X \geqslant 0{,}5$, les rôles sont échangés : $X>3(1-X) \iff 4X>3 \iff X>\frac{3}{4}$.

Autrement dit, la condition est réalisée exactement lorsque le petit morceau mesure moins de $\frac{1}{4}$ m : le point de cassure est à moins de 25 cm de l'une des deux extrémités.

Calcul. Pour la loi uniforme sur $[0\,;1]$:

$$P\left(X<\frac{1}{4}\right)+P\left(X>\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}, \qquad \boxed{P=\frac{1}{2}}.$$

Une fois sur deux, le grand morceau mesure plus de trois fois le petit.