Calculatrice autorisée (mode examen)
Durée conseillée indiquée pour chaque exercice.

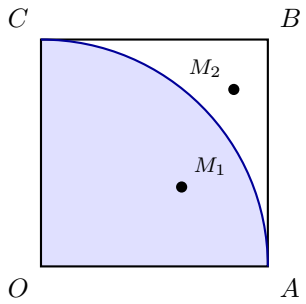
Exercice 1 (25 min)

6 points

Dans un repère orthonormé, on considère le carré $OABC$ de côté 1, avec $O(0\,;0)$, $A(1\,;0)$, $B(1\,;1)$ et $C(0\,;1)$, et le quart de disque de centre O et de rayon 1 contenu dans ce carré (figure ci-contre). On choisit un point $M(x\,;y)$ au hasard dans le carré : ses coordonnées x et y sont deux nombres obtenus indépendamment par la fonction `random()`, qui renvoie un nombre au hasard de l'intervalle $[0\,;1[$. La probabilité que M appartienne à une partie du carré est proportionnelle à l'aire de cette partie.

```
from random import random

def estimation(n):
    compteur = 0
    for i in range(n):
        x = random()
        y = random()
        if ... :
            compteur = compteur + 1
    return 4 * compteur / n
```



1) La variable aléatoire X est égale au nombre renvoyé par `random()`. Quelle loi suit-elle ? Calculer $P(X \leqslant 0{,}3)$ et $P(0{,}25 \leqslant X \leqslant 0{,}75)$.

2) **a.** Calculer l'aire du quart de disque. En déduire la probabilité p que le point M appartienne au quart de disque ; arrondir au millième.

b. Quelle condition portant sur x et y traduit « le point M appartient au quart de disque » ? Recopier et compléter la ligne du programme contenant des pointillés.

3) Que représente le quotient `compteur / n` à la fin de la boucle ? Expliquer pourquoi la fonction `estimation(n)` renvoie une valeur proche de π lorsque n est grand.

4) Un appel `estimation(10000)` a renvoyé $3{,}136\,8$. Calculer l'écart entre cette valeur et π ; arrondir au millième. Comment obtenir, en général, une meilleure estimation ?

5) On veut maintenant simuler une variable aléatoire U qui suit la loi uniforme sur $[2\,;5]$. Recopier et compléter la fonction `def uniforme(): return ...`, puis justifier que la valeur renvoyée est bien comprise entre 2 et 5.

Exercice 2 (15 min)

4 points

À la kermesse d'une école, une cible rectangulaire de 40 cm de large et 30 cm de haut est posée au sol ; en son centre est dessiné un disque de rayon 5 cm. Un enfant lance un palet qui retombe en un point au hasard de la cible : la probabilité qu'il tombe dans une zone de la cible est proportionnelle à l'aire de cette zone.
On note X l'abscisse du point de chute, en centimètres, mesurée à partir du bord gauche de la cible ; X prend donc ses valeurs dans $[0\,;40]$.

1) Calculer la probabilité que le palet tombe dans le disque central ; arrondir au millième.

2) Montrer que la probabilité que le palet tombe dans la bande verticale formée des points d'abscisse comprise entre 10 et 30 est égale à $0{,}5$.

3) On admet que X suit la loi uniforme sur $[0\,;40]$.

a. Donner la densité de X et retrouver le résultat de la question **2**.

b. Calculer $P(X \geqslant 35)$.

c. Calculer $E(X)$ et interpréter ce nombre.

Exercice 3 (10 min)

3 points

On considère la fonction f définie sur $[-1\,;1]$ par $f(x) = \dfrac{3}{4}\left(1 - x^2\right)$.

1) Montrer que f est une densité de probabilité sur $[-1\,;1]$.

2) Soit X une variable aléatoire de densité f. Calculer $P(X \leqslant 0)$.

3) Calculer $P(-0{,}5 \leqslant X \leqslant 0{,}5)$; donner la valeur exacte puis une valeur approchée au millième.

Exercice 4 (25 min)

5,5 points

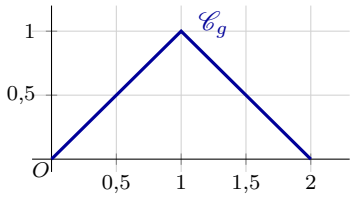
Dans une feuille de calcul, la fonction `ALEA()` renvoie un nombre au hasard de l'intervalle $[0\,;1[$; on admet que ce nombre suit la loi uniforme sur $[0\,;1]$. On a rempli $1\,000$ cellules avec la formule `=ALEA()` puis compté les valeurs obtenues dans chaque classe :

Classe	$[0\,;0{,}2[$	$[0{,}2\,;0{,}4[$	$[0{,}4\,;0{,}6[$	$[0{,}6\,;0{,}8[$	$[0{,}8\,;1[$
Effectif	208	193	201	197	201
Fréquence					
Probabilité théorique					

1) Recopier et compléter le tableau (fréquences et probabilités théoriques). Commenter.

2) Quelle formule, utilisant `ALEA()`, simule une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0\,;5]$?

On s'intéresse maintenant au nombre $S = X_1 + X_2$, où X_1 et X_2 sont deux nombres obtenus indépendamment par `ALEA()` (cellules `A2` et `B2` ; S est calculé en `C2` par `=A2+B2`). On recommence $1\,000$ fois. On admet (résultat hors programme) que S suit une loi à densité, de densité g définie par $g(s) = s$ sur $[0\,;1]$ et $g(s) = 2 - s$ sur $[1\,;2]$; sa courbe est représentée ci-dessous.



Classe	$[0\,;0{,}5[$	$[0{,}5\,;1[$	$[1\,;1{,}5[$	$[1{,}5\,;2]$
Effectif	121	377	381	121
Fréquence				
Probabilité théorique				

3) Vérifier, par un calcul d'aire, que g est bien une densité de probabilité sur $[0\,;2]$.

4) À l'aide de calculs d'aires de figures usuelles, déterminer $P(S \leqslant 0{,}5)$ et $P(0{,}5 \leqslant S \leqslant 1)$.

5) Recopier et compléter le second tableau, puis commenter. Quelle valeur de $E(S)$ la symétrie de la courbe suggère-t-elle ?

Exercice 5 (10 min)

1,5 point

Un bâton de longueur 1 m est cassé en un point choisi au hasard sur toute sa longueur (la position du point de cassure suit la loi uniforme sur $[0\,;1]$). Quelle est la probabilité que le plus grand des deux morceaux mesure plus de trois fois le plus petit ? *Toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte.*