Exercice 1

3,5 points

1) **Réponse b.** Les quatre fonctions sont positives sur $[0\,;2]$; une densité doit de plus avoir une intégrale égale à 1 :

$$\int_0^2 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^2 = \frac{4}{4} = 1,$$

alors que $\displaystyle\int_0^2 x\,\mathrm{d}x = 2$, $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$ et $\displaystyle\int_0^2 2x\,\mathrm{d}x = 4$.

2) **Réponse b.** $\{X > 3\}$ est l'évènement contraire de $\{X \leqslant 3\}$, donc $P(X > 3) = 1 - P(X \leqslant 3) = 1 - F(3)$.

3) **Réponse b.** $P(X \leqslant 10) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}1\times 10} = 1 - \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}63$.

4) **Réponse b.** $E(X) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$.

5) **Réponse b.** Par absence de mémoire de la loi exponentielle, $P_{(X>5)}(X > 5+3) = P(X > 3)$.

6) **Réponse c.** La densité est $x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$, de dérivée $-\lambda^2\,\mathrm{e}^{-\lambda x} < 0$: elle est décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

7) **Réponse a.** Pour une loi à densité, la probabilité d'une valeur isolée est l'aire d'un segment, donc $P(X = 2) = \displaystyle\int_2^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Exercice 2

4,5 points

1) La fonction de répartition $F : x \longmapsto P(X \leqslant x)$ est croissante, nulle en 0 et tend vers 1 : c'est la courbe $\mathscr{C}_2$. La densité $f(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$ est décroissante et tend vers 0 : c'est la courbe $\mathscr{C}_1$.

$$\boxed{\mathscr{C}_1 \text{ représente } f \quad \text{et} \quad \mathscr{C}_2 \text{ représente } F}.$$

2) $f(0) = \lambda\,\mathrm{e}^0 = \lambda$: le paramètre est l'ordonnée du point de $\mathscr{C}_1$ d'abscisse 0. On lit $f(0) = 0{,}5$, donc $\boxed{\lambda = 0{,}5}$.

3) **a.** $P(X \leqslant 2) = F(2)$: on lit l'ordonnée du point de $\mathscr{C}_2$ d'abscisse 2, soit environ $\boxed{P(X \leqslant 2) \approx 0{,}63}$.

b. $P(X \leqslant 2) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}5\times 2} = 1 - \mathrm{e}^{-1} = 0{,}632\ldots$, soit $\boxed{P(X \leqslant 2) \approx 0{,}63}$, en accord avec la lecture.

4) $P(X \leqslant 2) = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$: c'est l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_1$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

5) *Graphiquement :* on cherche l'abscisse du point de $\mathscr{C}_2$ d'ordonnée $0{,}5$; on lit $x \approx 1{,}4$.

Par le calcul :

$$P(X \leqslant x) = 0{,}5 \iff 1 - \mathrm{e}^{-0{,}5x} = 0{,}5 \iff \mathrm{e}^{-0{,}5x} = 0{,}5 \iff -0{,}5x = \ln 0{,}5$$

$$\iff x = \frac{-\ln 0{,}5}{0{,}5} = 2\ln 2, \qquad \boxed{x = 2\ln 2 \approx 1{,}39}.$$

6) Pour tout $t > 0$, $\displaystyle\int_0^t 0{,}5\,\mathrm{e}^{-0{,}5x}\,\mathrm{d}x = \Big[-\mathrm{e}^{-0{,}5x}\Big]_0^t = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}5t}$. Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0{,}5t} = 0$, cette aire tend vers 1 quand t tend vers $+\infty$: l'aire totale sous la courbe de f vaut 1. C'est la propriété qui fait de f une densité de probabilité : $P(X \geqslant 0) = 1$.

Exercice 3

6 points

1) Pour une loi exponentielle de paramètre λ, $E(D) = \dfrac{1}{\lambda}$. La durée moyenne annoncée est 4 ans : $\dfrac{1}{\lambda} = 4$, donc $\boxed{\lambda = \dfrac{1}{4} = 0{,}25}$.

2) La probabilité cherchée est $P(D > 2)$:

$$P(D > 2) = 1 - P(D \leqslant 2) = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-0{,}25\times 2}\right) = \mathrm{e}^{-0{,}5} = 0{,}606\,5\ldots, \qquad \boxed{P(D > 2) \approx 0{,}607}.$$

3) On cherche $P_{(D>3)}(D > 3+2)$. La loi exponentielle est *sans mémoire* : pour tous réels positifs t et h, $P_{(D>t)}(D > t+h) = P(D > h)$. Donc

$$P_{(D>3)}(D > 5) = P(D > 2), \qquad \boxed{P_{(D>3)}(D > 5) \approx 0{,}607}.$$

Une pompe « n'a pas de mémoire » de ses trois années de fonctionnement : sa probabilité de tenir encore deux ans est la même qu'une pompe neuve.
Vérification par le calcul : $\dfrac{P(D > 5)}{P(D > 3)} = \dfrac{\mathrm{e}^{-1{,}25}}{\mathrm{e}^{-0{,}75}} = \mathrm{e}^{-0{,}5}$.

4) **a.** Pour chacune des 12 pompes, on regarde si elle fonctionne encore sans panne après deux ans (succès, de probabilité $p = P(D > 2) \approx 0{,}607$) ou non. Les 12 épreuves sont identiques et indépendantes, et N compte le nombre de succès :

$$\boxed{N \text{ suit la loi binomiale } \mathcal{B}(12\,;\,0{,}607)}.$$

b. Avec la calculatrice (ou en détaillant les deux termes) :

$$P(N \geqslant 11) = P(N = 11) + P(N = 12) = \binom{12}{11} 0{,}607^{11} \times 0{,}393 + 0{,}607^{12} \approx 0{,}019\,4 + 0{,}002\,5,$$

soit (calculatrice) $\boxed{P(N \geqslant 11) \approx 0{,}022}$.

5) Si la durée moyenne était bien de 4 ans, observer au moins 11 pompes sur 12 encore en fonctionnement après deux ans aurait une probabilité d'environ $2\,\%$ seulement, alors qu'on en attend en moyenne $E(N) = 12 \times 0{,}607 \approx 7{,}3$. Un évènement aussi peu probable dans le modèle conduit

à douter de ce modèle : les pompes semblent durer *plus* longtemps que les 4 ans annoncés (ce qui n'est pas en défaveur du fabricant). Il faudrait toutefois confirmer avec un échantillon plus grand que 12 pompes.

Exercice 4

6 points

1) **a.** Une primitive de $x \longmapsto 3\,\mathrm{e}^{-3x}$ est $x \longmapsto -\mathrm{e}^{-3x}$, donc

$$\int_0^t 3\,\mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x = \Big[-\mathrm{e}^{-3x}\Big]_0^t = -\mathrm{e}^{-3t} + 1, \qquad \boxed{\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x = 1 - \mathrm{e}^{-3t}}.$$

La fonction f est continue et positive sur $[0\,;+\infty[$ (une exponentielle est strictement positive), et $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(1-\mathrm{e}^{-3t}\right) = 1$ car $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-3t} = 0$. L'aire totale sous la courbe vaut 1 : f est une densité de probabilité sur $[0\,;+\infty[$ (celle de la loi exponentielle de paramètre 3).

b. $P(X \leqslant 1) = 1 - \mathrm{e}^{-3} = 0{,}950\,2\ldots$, soit $\boxed{P(X \leqslant 1) \approx 0{,}950}$.
$P(X > 2) = 1 - P(X \leqslant 2) = 1 - \left(1-\mathrm{e}^{-6}\right) = \mathrm{e}^{-6} = 0{,}002\,47\ldots$, soit $\boxed{P(X > 2) \approx 0{,}002}$.

c.

$$P(1 \leqslant X \leqslant 2) = P(X \leqslant 2) - P(X \leqslant 1) = \left(1-\mathrm{e}^{-6}\right) - \left(1-\mathrm{e}^{-3}\right) = \mathrm{e}^{-3} - \mathrm{e}^{-6} = 0{,}047\,3\ldots$$

soit $\boxed{P(1 \leqslant X \leqslant 2) \approx 0{,}047}$.

2) **a.** $P(Y \leqslant 5) = 1 - \mathrm{e}^{-5\lambda}$, donc

$$1 - \mathrm{e}^{-5\lambda} = 0{,}6 \iff \mathrm{e}^{-5\lambda} = 0{,}4 \iff -5\lambda = \ln 0{,}4 \iff \lambda = -\frac{\ln 0{,}4}{5}.$$

Or $-\ln 0{,}4 = \ln\dfrac{1}{0{,}4} = \ln 2{,}5$, d'où $\boxed{\lambda = \dfrac{\ln 2{,}5}{5} \approx 0{,}183}$.

b. $E(Y) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{5}{\ln 2{,}5} = 5{,}456\ldots$, soit $\boxed{E(Y) \approx 5{,}46}$.

3) $P(Z > t) = \mathrm{e}^{-0{,}2t}$, donc

$$P(Z > t) = 0{,}05 \iff \mathrm{e}^{-0{,}2t} = 0{,}05 \iff -0{,}2t = \ln 0{,}05$$

$$\iff t = \frac{\ln 0{,}05}{-0{,}2} = -5\ln 0{,}05 = 5\ln 20, \qquad \boxed{t = 5\ln 20 \approx 15{,}0}.$$

Autrement dit, Z dépasse 15 dans $5\,\%$ des cas environ.