Calculatrice autorisée (mode examen)

Exercice 1

3,5 points

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie, puis **justifier brièvement**. Une réponse fausse n'enlève pas de point.

1) Laquelle des fonctions suivantes définit une densité de probabilité sur $[0\,;2]$?

a) $f(x) = x$ b) $f(x) = \dfrac{x}{2}$ c) $f(x) = \dfrac{1}{4}$ d) $f(x) = 2x$

2) X est une variable aléatoire à densité de fonction de répartition F. Alors $P(X > 3)$ est égale à :

a) $F(3)$ b) $1 - F(3)$ c) $F(-3)$ d) $\dfrac{1}{F(3)}$

3) X suit la loi exponentielle de paramètre $0{,}1$. Une valeur approchée de $P(X \leqslant 10)$ est :

a) $0{,}37$ b) $0{,}63$ c) $0{,}10$ d) 1

4) X suit la loi exponentielle de paramètre 4. Alors $E(X)$ est égale à :

a) 4 b) $0{,}25$ c) 2 d) $0{,}5$

5) X suit une loi exponentielle. Alors $P_{(X>5)}(X > 8)$ est égale à :

a) $P(X > 8)$ b) $P(X > 3)$ c) $P(X > 13)$ d) $P(X \leqslant 3)$

6) Sur $[0\,;+\infty[$, la fonction densité d'une loi exponentielle est :

a) croissante b) constante
c) décroissante d) croissante puis décroissante

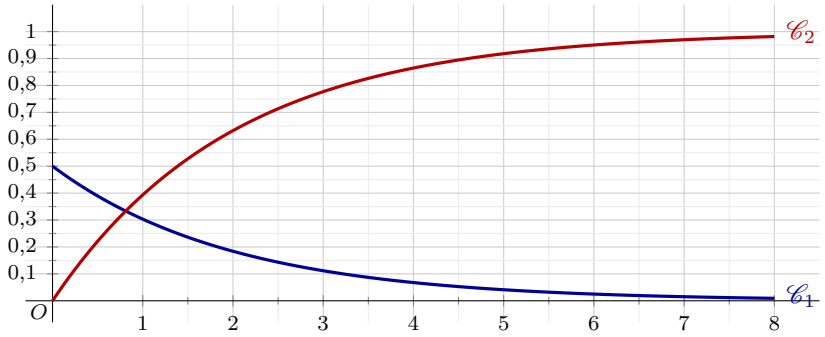
7) X suit une loi à densité, de densité f et de fonction de répartition F. Alors $P(X = 2)$ vaut :

a) 0 b) $f(2)$ c) $F(2)$ d) $1 - F(2)$

Exercice 2

4,5 points

Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ. On a représenté ci-dessous, sur $[0\,;8]$, la courbe de sa densité f et la courbe de sa fonction de répartition $F : x \longmapsto P(X \leqslant x)$, sans préciser laquelle est $\mathscr{C}_1$ et laquelle est $\mathscr{C}_2$.



1) Associer chaque courbe à la fonction qu'elle représente, en justifiant.

2) Lire graphiquement la valeur de λ. Justifier.

3) **a.** Lire graphiquement une valeur approchée de $P(X \leqslant 2)$ (on expliquera la lecture effectuée).

b. Retrouver cette valeur par le calcul ; arrondir au centième.

4) Quelle aire du graphique représente la probabilité $P(X \leqslant 2)$? La décrire précisément.

5) Résoudre graphiquement l'équation $P(X \leqslant x) = 0{,}5$, puis la résoudre par le calcul ; arrondir au centième.

6) Expliquer pourquoi l'aire totale du domaine situé sous la courbe de f, pour $x \geqslant 0$, est égale à 1.

Exercice 3

6 points

Une pompe à insuline est un petit appareil porté en permanence par certaines personnes diabétiques, qui délivre l'insuline en continu. On s'intéresse à la durée de fonctionnement D, en années, d'un modèle de pompe avant sa première panne. Le fabricant annonce une durée moyenne de fonctionnement de 4 ans et on admet que D suit une loi exponentielle de paramètre λ.
Dans tout l'exercice, les probabilités seront arrondies au millième.

1) Justifier que $\lambda = 0{,}25$.

2) Calculer la probabilité qu'une pompe fonctionne plus de 2 ans sans panne.

3) Une pompe fonctionne sans panne depuis 3 ans. Quelle est la probabilité qu'elle fonctionne encore au moins 2 ans de plus ? Nommer la propriété utilisée.

4) Un service de diabétologie a équipé, le même mois, 12 patients avec des pompes de ce modèle. On admet que les pannes des différentes pompes sont indépendantes et on note N le nombre de pompes qui fonctionnent encore sans panne deux ans plus tard.

a. Justifier que N suit une loi binomiale et préciser ses paramètres (on prendra $p = 0{,}607$).

b. Calculer $P(N \geqslant 11)$.

5) Deux ans plus tard, 11 des 12 pompes du service fonctionnent encore sans panne. Ce constat remet-il en cause la durée moyenne annoncée par le fabricant ? Argumenter.

Exercice 4

6 points

Questions indépendantes. Sauf indication contraire, arrondir les valeurs approchées au millième.

1) On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = 3\,\mathrm{e}^{-3x}$.

a. Soit $t > 0$. Calculer $\displaystyle\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$ en fonction de t. En déduire que f est une densité de probabilité sur $[0\,;+\infty[$.

b. Soit X une variable aléatoire de densité f. Calculer $P(X \leqslant 1)$ et $P(X > 2)$.

c. Calculer $P(1 \leqslant X \leqslant 2)$.

2) Une variable aléatoire Y suit la loi exponentielle de paramètre λ et vérifie $P(Y \leqslant 5) = 0{,}6$.

a. Montrer que $\lambda = \dfrac{\ln 2{,}5}{5}$, puis en donner une valeur approchée.

b. En déduire $E(Y)$, arrondie au centième.

3) Une variable aléatoire Z suit la loi exponentielle de paramètre $0{,}2$. Déterminer le réel t tel que $P(Z > t) = 0{,}05$; arrondir au dixième.