Exercice 1 — Automatismes

4 points

1) Loi uniforme sur $[0\,;4]$: $P(X \leqslant 1) = \dfrac{1-0}{4-0}$, soit $\boxed{P(X \leqslant 1) = \dfrac{1}{4}}$.

2) La densité de la loi uniforme sur $[a\,;b]$ vaut $\dfrac{1}{b-a}$ sur $[a\,;b]$: ici $\dfrac{1}{7-2} = \boxed{\dfrac{1}{5}}$.

3) $E(X) = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{3+9}{2}$, soit $\boxed{E(X) = 6}$.

4) L'aire totale sous la courbe d'une densité vaut 1 : $\boxed{\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1}$.

5) Pour $x \geqslant 0$, $\boxed{f(x) = 2\,\mathrm{e}^{-2x}}$.

6) $E(T) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0{,}25}$, soit $\boxed{E(T) = 4}$.

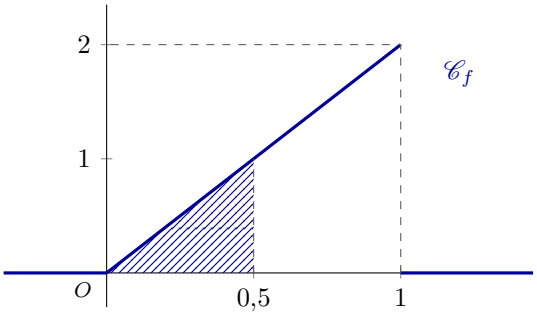
7) $P(X > 3) = 1 - P(X \leqslant 3) = 1 - F(3) = 1 - 0{,}8$, soit $\boxed{P(X > 3) = 0{,}2}$.

8) $P(2 \leqslant X \leqslant 5) = F(5) - F(2) = 0{,}7 - 0{,}3$, soit $\boxed{P(2 \leqslant X \leqslant 5) = 0{,}4}$.

Exercice 2 — Une densité sur $[0\,;1]$

6,5 points

1) Sur $[0\,;1]$, la courbe de f est le segment joignant l'origine au point de coordonnées $(1\,;2)$; ailleurs, f est nulle.



2) **a.** $P(X \leqslant 0{,}5)$ est l'aire du domaine situé sous la courbe de f entre 0 et $0{,}5$ (hachuré ci-dessus), c'est-à-dire l'aire d'un triangle rectangle de base $0{,}5$ et de hauteur $f(0{,}5) = 1$:

$$P(X \leqslant 0{,}5) = \int_0^{0{,}5} 2x\,\mathrm{d}x = \Big[x^2\Big]_0^{0{,}5} = 0{,}5^2, \qquad \boxed{P(X \leqslant 0{,}5) = 0{,}25}.$$

b. L'évènement $\{X > 0{,}5\}$ est le contraire de $\{X \leqslant 0{,}5\}$: $P(X > 0{,}5) = 1 - 0{,}25$, soit $\boxed{P(X > 0{,}5) = 0{,}75}$.

3) Pour $x \in [0\,;1]$, comme f est nulle sur $]-\infty\,;0[$:

$$P(X \leqslant x) = \int_0^x 2t\,\mathrm{d}t = \Big[t^2\Big]_0^x = x^2 - 0, \qquad \boxed{P(X \leqslant x) = x^2}.$$

Si $x < 0$, aucune valeur de X n'est inférieure à x : $P(X \leqslant x) = 0$. Si $x > 1$, toutes les valeurs de X sont inférieures à x : $P(X \leqslant x) = 1$.

4) $P(0{,}2 \leqslant X \leqslant 0{,}6) = P(X \leqslant 0{,}6) - P(X \leqslant 0{,}2) = 0{,}6^2 - 0{,}2^2 = 0{,}36 - 0{,}04$, soit $\boxed{P(0{,}2 \leqslant X \leqslant 0{,}6) = 0{,}32}$.

5) $m \in [0\,;1]$ (car $P(X \leqslant m)$ vaut 0 avant et 1 après) et $P(X \leqslant m) = m^2$. Donc

$$m^2 = 0{,}5 = \frac{1}{2} \iff m = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{car } m \geqslant 0), \qquad \boxed{m = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}71}.$$

(avec $\sqrt{2} \approx 1{,}41$: $m \approx 1{,}41 \div 2 \approx 0{,}705$.)

6)

$$E(X) = \int_0^1 x\,f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 2x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}, \qquad \boxed{E(X) = \frac{2}{3} \approx 0{,}67}.$$

On a $E(X) \approx 0{,}67 < m \approx 0{,}71$: l'espérance est ici plus petite que la médiane. (Les deux sont supérieures à $0{,}5$: la densité est plus grande près de 1, donc X prend plus souvent de grandes valeurs.)

Exercice 3 — Attendre le tram, attendre l'appel

9,5 points

Partie A — À l'arrêt de tram

1) La loi uniforme sur $[0\,;8]$ a pour densité la fonction constante $\boxed{f(t) = \frac{1}{8}}$ sur $[0\,;8]$ (et 0 ailleurs).

2) Pour la loi uniforme sur $[0\,;8]$, la probabilité d'un intervalle est le quotient de sa longueur par 8 :

$$P(T \leqslant 2) = \frac{2-0}{8} = \boxed{\frac{1}{4}} \qquad \text{et} \qquad P(T > 6) = \frac{8-6}{8} = \boxed{\frac{1}{4}}.$$

3) $P(3 \leqslant T \leqslant 5) = \dfrac{5-3}{8} = \dfrac{2}{8}$, soit $\boxed{P(3 \leqslant T \leqslant 5) = \frac{1}{4}}$.

4) Pour $t \in [0\,;8]$: $\boxed{P(T \leqslant t) = \frac{t}{8}}$. Alors

$$P(T \leqslant t) = 0{,}75 \iff \frac{t}{8} = \frac{3}{4} \iff t = 6 : \qquad \boxed{t = 6}.$$

Trois fois sur quatre, le voyageur attend au plus 6 minutes.

5) $E(T) = \dfrac{0+8}{2}$, soit $\boxed{E(T) = 4}$.
Interprétation : sur un grand nombre de trajets, le voyageur attend en moyenne 4 minutes, c'est-à-dire la moitié de l'intervalle entre deux rames.

Partie B — Au centre de régulation

1) Pour $x \geqslant 0$, la densité de D est $\boxed{g(x) = 0{,}2\,\mathrm{e}^{-0{,}2x}}$. Alors

$$P(D \leqslant 5) = \int_0^5 0{,}2\,\mathrm{e}^{-0{,}2x}\,\mathrm{d}x = \Big[-\mathrm{e}^{-0{,}2x}\Big]_0^5 = -\mathrm{e}^{-1} + 1, \qquad \boxed{P(D \leqslant 5) = 1 - \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}63}.$$

2) « Aucun appel pendant les dix minutes qui suivent un appel » signifie que la durée jusqu'à l'appel suivant dépasse 10 minutes :

$$P(D > 10) = 1 - P(D \leqslant 10) = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-0{,}2\times 10}\right) = \mathrm{e}^{-2}, \qquad \boxed{P(D > 10) = \mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}14}.$$

Interprétation : dans environ $14\,\%$ des cas, le centre reste dix minutes sans recevoir d'appel.

3)

$$P(D \leqslant d) = 0{,}5 \iff 1 - \mathrm{e}^{-0{,}2d} = 0{,}5 \iff \mathrm{e}^{-0{,}2d} = 0{,}5 \iff -0{,}2d = \ln 0{,}5 = -\ln 2$$
$$\iff d = \frac{\ln 2}{0{,}2} = 5\ln 2, \qquad \boxed{d = 5\ln 2 \approx 3{,}45 \text{ min}} \qquad (5 \times 0{,}69 = 3{,}45).$$

Interprétation : une fois sur deux, l'appel suivant arrive en moins de 3 min 30 environ ; d est la *médiane* de la durée entre deux appels.

4) $E(D) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0{,}2}$, soit $\boxed{E(D) = 5 \text{ min}}$.
En moyenne, 5 minutes séparent deux appels : en une heure (60 minutes), le centre reçoit donc en moyenne $\dfrac{60}{5} = \boxed{12 \text{ appels}}$.

5) 20 appels par heure, c'est en moyenne un appel toutes les $\dfrac{60}{20} = 3$ minutes, donc $E(D) = 3$ et $\lambda = \dfrac{1}{E(D)}$:

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{3}}.$$