Calculatrice interdite

Données utiles (valeurs approchées) : $\mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}37$; $\mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}14$; $\ln 2 \approx 0{,}69$; $\sqrt{2} \approx 1{,}41$.

Exercice 1 — Automatismes

4 points

Répondre directement sur la copie, **sans justification**. Chaque réponse exacte rapporte $0{,}5$ point.

1) X suit la loi uniforme sur $[0\,;4]$. Donner $P(X \leqslant 1)$.

2) Donner la valeur de la densité de la loi uniforme sur $[2\,;7]$ sur cet intervalle.

3) X suit la loi uniforme sur $[3\,;9]$. Donner $E(X)$.

4) Une variable aléatoire X à valeurs dans $[0\,;1]$ a pour densité la fonction f. Que vaut $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$?

5) X suit la loi exponentielle de paramètre 2. Donner l'expression de sa densité $f(x)$ pour $x \geqslant 0$.

6) T suit la loi exponentielle de paramètre $0{,}25$. Donner $E(T)$.

7) F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à densité et $F(3) = 0{,}8$. Donner $P(X > 3)$.

8) F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à densité, avec $F(2) = 0{,}3$ et $F(5) = 0{,}7$. Donner $P(2 \leqslant X \leqslant 5)$.

Exercice 2 — Une densité sur $[0\,;1]$

6,5 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$ si $x \in [0\,;1]$ et $f(x) = 0$ sinon. On admet que f est une densité de probabilité et on note X une variable aléatoire de densité f.

1) Représenter la fonction f dans un repère orthogonal (unité : 4 cm en abscisse, 2 cm en ordonnée).

2) **a.** Calculer $P(X \leqslant 0{,}5)$ et hachurer sur le graphique l'aire correspondante.

b. En déduire $P(X > 0{,}5)$.

3) Montrer que, pour tout réel $x \in [0\,;1]$, $P(X \leqslant x) = x^2$. Que vaut $P(X \leqslant x)$ lorsque $x < 0$? lorsque $x > 1$?

4) En déduire $P(0{,}2 \leqslant X \leqslant 0{,}6)$.

5) On appelle *médiane* de X le réel m tel que $P(X \leqslant m) = 0{,}5$. Déterminer la valeur exacte de m, puis en donner une valeur approchée au centième.

6) Calculer $E(X)$. Comparer $E(X)$ et m.

Exercice 3 — Attendre le tram, attendre l'appel

9,5 points

Partie A — À l'arrêt de tram

Entre 10 h et 16 h, les rames d'une ligne de tram passent à un arrêt toutes les 8 minutes, très régulièrement. Un voyageur qui ne connaît pas les horaires arrive à l'arrêt à un instant au hasard. On note T son temps d'attente, en minutes, jusqu'à la rame suivante. On admet que T suit la loi uniforme sur $[0\,;8]$.

1) Donner l'expression de la densité f de T sur $[0\,;8]$.

2) Calculer $P(T \leqslant 2)$ et $P(T > 6)$.

3) Calculer la probabilité que le voyageur attende entre 3 et 5 minutes.

4) Pour $t \in [0\,;8]$, exprimer $P(T \leqslant t)$ en fonction de t. Pour quelle valeur de t a-t-on $P(T \leqslant t) = 0{,}75$?

5) Calculer $E(T)$ et interpréter ce résultat dans le contexte.

Partie B — Au centre de régulation

La nuit, entre 2 h et 5 h, un centre de régulation des appels médicaux d'urgence reçoit peu d'appels. On note D la durée, en minutes, qui sépare deux appels consécutifs. On admet que D suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}2$.

Rappel : l'espérance d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ est $\dfrac{1}{\lambda}$.

1) Donner l'expression de la densité de D. Calculer $P(D \leqslant 5)$ et en donner une valeur approchée.

2) Calculer la probabilité qu'aucun appel ne survienne pendant les dix minutes qui suivent un appel. En donner une valeur approchée et interpréter.

3) Déterminer la durée d telle que $P(D \leqslant d) = 0{,}5$. En donner une valeur approchée et interpréter ce nombre.

4) Calculer $E(D)$. En déduire le nombre moyen d'appels reçus par le centre en une heure, la nuit.

5) En soirée, le centre reçoit en moyenne 20 appels par heure. Quelle valeur du paramètre λ conviendrait alors pour modéliser la durée entre deux appels ?