Exercice 1

3,5 points

1) Sur $[-1\,;2]$, la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses (f est positive), donc $\boxed{I_1 > 0}$. Sur $[2\,;3]$, la courbe est en dessous de l'axe (f est négative), donc $\boxed{I_2 < 0}$.

2) f étant positive sur $[-1\,;2]$, I_1 est l'aire du domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 2$. En comptant les carreaux (en reconstituant des carreaux entiers avec les morceaux), on en trouve environ 36, et chaque carreau vaut $0{,}25$ unité d'aire :

$$I_1 \approx 36 \times 0{,}25 = \boxed{9}$$ (toute estimation entre 8 et 10 est acceptable).

3) Sur $[0\,;1]$, on lit sur le graphique que f est décroissante, avec $f(0) = 4$ et $f(1) = 3$: pour tout $x \in [0\,;1]$, $3 \leqslant f(x) \leqslant 4$. Le domaine sous la courbe sur $[0\,;1]$ contient donc le rectangle de largeur 1 et de hauteur 3 et il est contenu dans le rectangle de largeur 1 et de hauteur 4 :

$$3 \times 1 \leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 4 \times 1, \qquad \text{soit} \qquad \boxed{3 \leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 4}.$$

4) D'après la relation de Chasles,

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = I_1 + I_2 = 9 - \frac{7}{3} = \boxed{\frac{20}{3}}.$$

L'aire du domaine, elle, additionne les aires des deux parties : la partie au-dessus de l'axe a pour aire $I_1 = 9$ et la partie en dessous a pour aire $-I_2 = \dfrac{7}{3}$ (une aire est positive). D'où

$$\mathcal{A} = I_1 - I_2 = 9 + \frac{7}{3} = \boxed{\frac{34}{3}} \approx 11{,}33 \text{ unités d'aire.}$$

Remarque : l'intégrale $\dfrac{20}{3}$ est plus petite que l'aire $\dfrac{34}{3}$, car la partie située sous l'axe est comptée négativement dans l'intégrale.

Exercice 2

4 points

a. Faux. Une primitive de $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ est $x \longmapsto -\mathrm{e}^{-x}$, donc

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 = -\mathrm{e}^{-1} - \left(-\mathrm{e}^{0}\right) = 1 - \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}63.$$

Or $\mathrm{e}^{-1} - 1 \approx -0{,}63 < 0$: ce n'est pas la valeur de l'intégrale (qui est d'ailleurs positive, la fonction étant positive). L'affirmation a. est fausse.

b. Faux. Contre-exemple : $f(x) = x$ sur $[-1\,;1]$. Alors

$$\int_{-1}^{1} x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0,$$

et pourtant f n'est pas la fonction nulle (par exemple $f(1) = 1$). Les aires situées au-dessus et

en dessous de l'axe se compensent. L'affirmation b. est fausse.

c. Vrai. La valeur moyenne de $x \longmapsto x^2$ sur $[0\,;3]$ est

$$\frac{1}{3-0}\int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{1}{3}\times\frac{27}{3} = \frac{1}{3}\times 9 = 3.$$

L'affirmation c. est vraie.

d. Vrai. Une primitive de $x \longmapsto x^3+2$ est $x \longmapsto \dfrac{x^4}{4}+2x$, donc

$$\int_{-1}^1 \left(x^3+2\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4}+2x\right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{4}+2\right)-\left(\frac{1}{4}-2\right) = 4.$$

L'affirmation d. est vraie.

Exercice 3

3,5 points

1) Les abscisses des points d'intersection sont les solutions de $f(x)=g(x)$:

$$x^2 = -x^2+2x+4 \iff 2x^2-2x-4=0 \iff x^2-x-2=0.$$

$\Delta = (-1)^2-4\times 1\times(-2) = 9$, d'où les racines $x=\dfrac{1-3}{2}=-1$ et $x=\dfrac{1+3}{2}=2$.
Les courbes se coupent donc en deux points, d'abscisses -1 et 2 (et d'ordonnées $f(-1)=1$ et $f(2)=4$).

2) $g(x)-f(x) = -2x^2+2x+4 = -2\left(x^2-x-2\right) = -2(x+1)(x-2)$.
Le trinôme x^2-x-2 a pour racines -1 et 2 et un coefficient dominant positif : il est négatif entre ses racines. Donc, sur $[-1\,;2]$, $x^2-x-2\leqslant 0$ et $g(x)-f(x) = -2\left(x^2-x-2\right)\geqslant 0$.
Sur $[-1\,;2]$, $g(x)\geqslant f(x)$: $\mathcal{C}_g$ est au-dessus de $\mathcal{C}_f$.

3) Comme $g\geqslant f$ sur $[-1\,;2]$, l'aire du domaine compris entre les deux courbes est

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^2 \left(g(x)-f(x)\right)\mathrm{d}x = \int_{-1}^2 \left(-2x^2+2x+4\right)\mathrm{d}x = \left[-\frac{2x^3}{3}+x^2+4x\right]_{-1}^2.$$

En 2 : $-\dfrac{16}{3}+4+8 = \dfrac{20}{3}$; en -1 : $\dfrac{2}{3}+1-4 = -\dfrac{7}{3}$. Donc

$$\mathcal{A} = \frac{20}{3}-\left(-\frac{7}{3}\right) = \frac{27}{3} = 9 \text{ unités d'aire}.$$

L'unité d'aire est l'aire du rectangle de côtés 2 cm et 1 cm, soit 2 cm^2 : $\mathcal{A} = 9\times 2 = 18$ cm^2.

Exercice 4

1,5 point

1) Une primitive de $t \longmapsto 3\,\mathrm{e}^{0,2t}$ est $t \longmapsto \dfrac{3}{0,2}\mathrm{e}^{0,2t} = 15\,\mathrm{e}^{0,2t}$, donc

$$m = \frac{1}{5-0}\int_0^5 3\,\mathrm{e}^{0,2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{5}\left[15\,\mathrm{e}^{0,2t}\right]_0^5 = \frac{1}{5}\left(15\,\mathrm{e}^1 - 15\right) = \boxed{3(\mathrm{e}-1)} \approx \boxed{5{,}15}.$$

2) $g(0) = 3$ et $g(5) = 3\,\mathrm{e} \approx 8{,}15$. On a bien $3 \leqslant 5{,}15 \leqslant 8{,}15$: $\boxed{g(0) \leqslant m \leqslant g(5)}$, ce qui est attendu puisque g est croissante sur $[0\,;5]$ et que la valeur moyenne est comprise entre le minimum et le maximum de la fonction.

Exercice 5

5 points

Partie A. Aire exacte du massif

1) $f(-2) = 4 - 4 = 0$ et $g(-2) = \dfrac{4}{2} - 2 = 0$; de même $f(2) = 0$ et $g(2) = 0$. Les deux courbes passent par les points $(-2\,;0)$ et $(2\,;0)$: $\boxed{\text{elles se coupent aux abscisses } -2 \text{ et } 2}$.

2) Pour tout réel x,

$$f(x) - g(x) = 4 - x^2 - \frac{x^2}{2} + 2 = 6 - \frac{3x^2}{2} = \frac{3}{2}\left(4 - x^2\right).$$

Sur $[-2\,;2]$, $x^2 \leqslant 4$, donc $4 - x^2 \geqslant 0$ et $f(x) - g(x) \geqslant 0$: $\boxed{f(x) \geqslant g(x) \text{ sur } [-2\,;2]}$ (la courbe de f est au-dessus de celle de g, ce que confirme la figure).

3) Une primitive de $x \longmapsto 6 - \dfrac{3x^2}{2}$ est $x \longmapsto 6x - \dfrac{x^3}{2}$, donc

$$\int_0^2 (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = \left[6x - \frac{x^3}{2}\right]_0^2 = 12 - 4 = \boxed{8}.$$

Les fonctions f et g ne dépendent que de x^2 : la figure est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, donc la moitié gauche du massif ($x \in [-2\,;0]$) a la même aire que la moitié droite. Comme $f \geqslant g$ sur $[-2\,;2]$,

$$\mathcal{A} = \int_{-2}^2 (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = 2\int_0^2 (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = 2 \times 8 = \boxed{16\ \text{m}^2}.$$

(On peut aussi écrire la relation de Chasles $\int_{-2}^2 = \int_{-2}^0 + \int_0^2$ et calculer $\int_{-2}^0 (f-g) = 0 - (-12+4) = 8$.)

4) Un massif rectangulaire de largeur 4 m et d'aire 16 m^2 aurait pour hauteur $\dfrac{16}{4} = \boxed{4\ \text{m}}$.
Ce nombre est la **valeur moyenne** de la fonction $f - g$ sur $[-2\,;2]$:

$$\frac{1}{2-(-2)}\int_{-2}^2 (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = \frac{16}{4} = 4.$$

La « hauteur » du massif (distance verticale entre les deux courbes) vaut en moyenne 4 m, alors qu'elle varie de 0 (aux extrémités) à 6 (au centre).

Partie B. Une estimation par tirage au hasard

1) Le rectangle R a pour dimensions 4 (de -2 à 2) sur 6 (de -2 à 4) : son aire vaut $4 \times 6 = 24$ m^2. Les points étant tirés au hasard dans R, la proportion de points tombés dans le massif estime le rapport entre l'aire du massif et celle de R :

$$\frac{\mathcal{A}}{24} \approx \frac{4\,012}{6\,000}, \qquad \text{d'où} \qquad \mathcal{A} \approx 24 \times \frac{4\,012}{6\,000} \approx \boxed{16{,}0 \text{ m}^2}.$$

L'estimation est très proche de la valeur exacte 16 m^2 de la partie A (la proportion théorique est $\frac{16}{24} = \frac{2}{3}$, et $\frac{4\,012}{6\,000} \approx 0{,}669$). Cette méthode, dite de Monte-Carlo, permet d'estimer une aire sans calculer d'intégrale.

2) Le coût de la plantation est $35 \times 16 = \boxed{560 \text{ €}}$.
Interprétation : planter ce massif de 16 m^2 revient à 560 € ; avec l'estimation de la question 1 on aurait trouvé environ 562 €, soit un écart de quelques euros seulement.

Exercice 6

2,5 points

a. Relation de Chasles : $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 5 + (-1) = \boxed{4}$.

b. Échanger les bornes change le signe : $\displaystyle\int_5^2 f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = -(-1) = \boxed{1}$.

c. Linéarité : $\displaystyle\int_0^5 (2f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = 2\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^5 g(x)\,\mathrm{d}x = 2 \times 4 - 4 = \boxed{4}$.

d. $\displaystyle\int_0^5 (f(x) + 3)\,\mathrm{d}x = \int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^5 3\,\mathrm{d}x = 4 + 3 \times 5 = \boxed{19}$ (l'intégrale de la constante 3 sur $[0\,;5]$ est l'aire d'un rectangle 5×3).

e. Valeur moyenne de f sur $[0\,;5]$: $\dfrac{1}{5-0}\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{5} = \boxed{0{,}8}$.