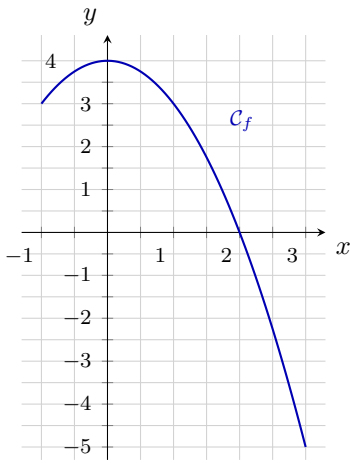
Calculatrice autorisée (mode examen)

Toutes les réponses doivent être justifiées, sauf mention contraire.

Exercice 1

3,5 points

La courbe $\mathcal{C}_f$ ci-contre représente une fonction f définie et continue sur $[-1\,;3]$. Dans le repère orthonormé, un carreau du quadrillage a pour aire $0{,}25$ unité d'aire.



On note $I_1 = \displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$ et $I_2 = \displaystyle\int_{2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

1) Donner, par lecture graphique, le signe de I_1 et celui de I_2.

2) Donner une estimation de I_1 à l'aide du quadrillage.

3) Justifier, à l'aide du graphique, que $3 \leqslant \displaystyle\int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 4$.

4) On admet que $I_1 = 9$ et $I_2 = -\dfrac{7}{3}$. En déduire $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$, puis l'aire, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 3$.

Exercice 2

4 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et **justifier**. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

a. $\displaystyle\int_{0}^{1} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-1} - 1$.

b. Si f est une fonction continue sur $[a\,;b]$ telle que $\displaystyle\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, alors $f(x) = 0$ pour tout x de $[a\,;b]$.

c. La valeur moyenne de la fonction $x \longmapsto x^2$ sur $[0\,;3]$ est égale à 3.

d. $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x^3 + 2)\,\mathrm{d}x = 4$.

Exercice 3

3,5 points

Dans un repère orthogonal d'unités 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée, on note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = -x^2 + 2x + 4$.

1) Montrer que les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent en deux points, d'abscisses -1 et 2.

2) Étudier le signe de $g(x) - f(x)$ sur $[-1\,;2]$. Quelle est la position relative des deux courbes sur cet intervalle ?

3) Calculer, en unités d'aire, l'aire du domaine compris entre les deux courbes pour $x \in [-1\,;2]$, puis l'exprimer en cm^2.

Exercice 4

1,5 point

Soit g la fonction définie sur $[0\,;5]$ par $g(t) = 3\,\mathrm{e}^{0,2t}$.

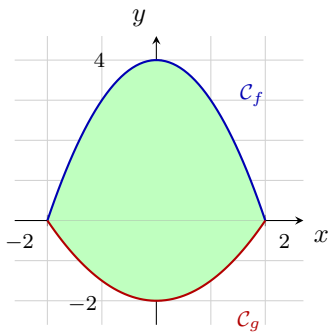
1) Calculer la valeur moyenne m de g sur $[0\,;5]$; donner la valeur exacte puis une valeur approchée au centième.

2) Vérifier que m est comprise entre $g(0)$ et $g(5)$.

Exercice 5

5 points

Le service des espaces verts d'une ville dessine un massif de fleurs. Dans un repère orthonormé d'unité 1 mètre, le contour du massif est formé, pour $x \in [-2\,;2]$, des courbes des fonctions f et g définies par $f(x) = 4 - x^2$ et $g(x) = \dfrac{x^2}{2} - 2$.
Le massif est la partie grisée de la figure ci-contre.



Partie A. Aire exacte du massif

1) Vérifier que les deux courbes se coupent aux points d'abscisses -2 et 2.

2) Montrer que, pour tout réel x, $f(x) - g(x) = \dfrac{3}{2}\left(4 - x^2\right)$, et en déduire que $f(x) \geqslant g(x)$ pour tout $x \in [-2\,;2]$.

3) Calculer $\displaystyle\int_0^2 (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$. En déduire, en utilisant la symétrie de la figure par rapport à l'axe des ordonnées, l'aire $\mathcal{A}$ du massif en m^2.

4) Le massif mesure 4 m de large. Quelle serait la hauteur d'un massif rectangulaire de même largeur et de même aire ? Interpréter ce nombre à l'aide de la fonction $f - g$.

Partie B. Une estimation par tirage au hasard

Le massif est contenu dans le rectangle R formé des points dont les coordonnées vérifient $-2 \leqslant x \leqslant 2$ et $-2 \leqslant y \leqslant 4$. Un logiciel tire au hasard $6\,000$ points dans ce rectangle ; $4\,012$ d'entre eux tombent dans le massif.

1) Calculer l'aire du rectangle R, puis en déduire une estimation de l'aire du massif, arrondie au dixième. Comparer avec le résultat de la partie A.

2) La plantation revient à 35 € par m^2 de massif. Déterminer le coût total de la plantation.

Exercice 6

2,5 points

Soit f et g deux fonctions continues sur $[0\,;5]$ telles que $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$, $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = -1$ et $\displaystyle\int_0^5 g(x)\,\mathrm{d}x = 4$.
Déterminer, en justifiant, la valeur de chacune des quantités suivantes.

a. $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ **b.** $\displaystyle\int_5^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ **c.** $\displaystyle\int_0^5 (2f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$

d. $\displaystyle\int_0^5 (f(x) + 3)\,\mathrm{d}x$ **e.** valeur moyenne de f sur $[0\,;5]$