Exercice 1 — Quatre intégrales

6 points

- Une primitive de $x \longmapsto 3x^2+1$ est $x \longmapsto x^3+x$, donc $A = \left[x^3+x\right]_0^1 = (1+1)-0 = \boxed{2}$.
- Sur $[1\,;\mathrm{e}]$, une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est $x \longmapsto \ln x$, donc $B = [\ln x]_1^{\mathrm{e}} = \ln \mathrm{e} - \ln 1 = 1-0 = \boxed{1}$.
- Une primitive de $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ est $x \longmapsto \mathrm{e}^x$, donc $C = [\mathrm{e}^x]_0^{\ln 3} = \mathrm{e}^{\ln 3} - \mathrm{e}^0 = 3-1 = \boxed{2}$.
- $\dfrac{2x}{x^2+1}$ est de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2+1 > 0$ et $u'(x) = 2x$: une primitive est $x \longmapsto \ln\left(x^2+1\right)$, donc $D = \left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \boxed{\ln 2}$.

Exercice 2 — Une courbe de Lorenz

6 points

1) **a.** La moitié la moins riche correspond à $x = 0{,}5$. Sur la courbe, le point d'abscisse $0{,}5$ a une ordonnée d'environ $0{,}3$: la moitié la moins riche perçoit environ $30\,\%$ du revenu total.

Contrôle par le calcul : $L(0{,}5) = \dfrac{3\times 0{,}25+0{,}5}{4} = \dfrac{1{,}25}{4} = 0{,}3125$.

b. Les $80\,\%$ les moins riches perçoivent la part

$$L(0{,}8) = \frac{3\times 0{,}64+0{,}8}{4} = \frac{1{,}92+0{,}8}{4} = \frac{2{,}72}{4} = 0{,}68.$$

Les $20\,\%$ les plus riches perçoivent donc $1-0{,}68 = 0{,}32$, soit $32\,\%$ du revenu total.

2) Une primitive de L est $x \longmapsto \dfrac{1}{4}\left(x^3+\dfrac{x^2}{2}\right)$, donc

$$\int_0^1 L(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left[x^3+\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\times\frac{3}{2} = \boxed{\frac{3}{8}}.$$

Sur $[0\,;1]$, la courbe est sous la droite $y=x$ (car $x - L(x) = \dfrac{3x-3x^2}{4} = \dfrac{3x(1-x)}{4} \geqslant 0$). L'aire cherchée est donc la différence entre l'aire sous la droite (le triangle, $\dfrac{1}{2}$) et l'aire sous la courbe :

$$\mathcal{A} = \int_0^1 (x-L(x))\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \boxed{\frac{1}{8}} = 0{,}125.$$

Contrôle graphique : le domaine occupe environ un quart du triangle sous la bissectrice (d'aire $0{,}5$), ce qui est cohérent.

3) $G = 2\mathcal{A} = 2\times\dfrac{1}{8} = \boxed{\dfrac{1}{4}} = 0{,}25$.

Plus la courbe de Lorenz s'éloigne de la droite $y=x$ (qui correspond à une répartition parfaitement égalitaire), plus l'aire $\mathcal{A}$, donc l'indice de Gini, est grand. Comme $0{,}4 > 0{,}25$, le second pays a la répartition la plus inégalitaire.

Exercice 3 — L'aire sous l'hyperbole

8 points

1) $F(1) = \displaystyle\int_1^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$: les deux bornes sont égales, le domaine est réduit à un segment et son aire est nulle. $\boxed{F(1) = 0}$.

2) **Théorème :** si f est une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$, la fonction F définie sur $[a\,;b]$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a\,;b]$ et a pour dérivée f.
Ici $f(t) = \dfrac{1}{t}$ est continue sur $[1\,;+\infty[$, donc F est dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et $\boxed{F'(x) = \dfrac{1}{x}}$.

3) Sur $[1\,;+\infty[$, les fonctions F et $\ln$ ont la même dérivée $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$. Elles diffèrent donc d'une constante : il existe un réel k tel que, pour tout $x \geqslant 1$, $F(x) = \ln x + k$.
En $x = 1$: $F(1) = \ln 1 + k$, soit $0 = 0 + k$, donc $k = 0$. Ainsi, pour tout $x \geqslant 1$, $\boxed{F(x) = \ln x}$.

4) $F(2) = \ln 2$ est l'aire du domaine situé sous l'hyperbole entre $t = 1$ et $t = 2$. Sur $[1\,;2]$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ est décroissante, donc $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant 1$.

- Le domaine contient le rectangle de largeur 1 et de hauteur $\dfrac{1}{2}$ (hauteur minimale de la courbe), d'aire $\dfrac{1}{2}$.
- Le domaine est contenu dans le rectangle de largeur 1 et de hauteur 1 (hauteur maximale), d'aire 1.

Par comparaison des aires : $\boxed{\dfrac{1}{2} \leqslant \ln 2 \leqslant 1}$.

Remarque : c'est ainsi que Grégoire de Saint-Vincent encadrait les aires sous l'hyperbole ; la valeur exacte est $\ln 2 \approx 0{,}69$.