Calculatrice interdite

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de son choix ; un résultat non démontré peut être admis pour la suite.

Exercice 1 — Quatre intégrales

6 points

Calculer la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes.

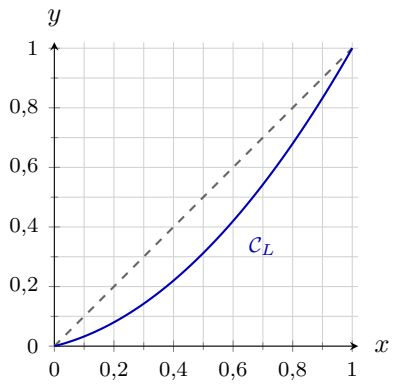
$$A = \int_0^1 (3x^2 + 1)\,\mathrm{d}x \qquad B = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \qquad C = \int_0^{\ln 3} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \qquad D = \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 2 — Une courbe de Lorenz

6 points

Dans un pays, on classe les habitants par revenu croissant. La **courbe de Lorenz** ci-contre associe à chaque réel x de $[0\,;1]$ la part $L(x)$ du revenu total perçue par la fraction x des habitants les moins riches. On admet que, pour tout $x \in [0\,;1]$, $L(x) = \dfrac{3x^2 + x}{4}$.

La droite d'équation $y = x$ est en pointillés.



1) **a.** Lire graphiquement la part du revenu total perçue par la moitié la moins riche des habitants.

b. Montrer par le calcul que les $20\,\%$ les plus riches perçoivent $32\,\%$ du revenu total.

2) On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine compris entre la droite d'équation $y = x$ et la courbe. Calculer $\displaystyle\int_0^1 L(x)\,\mathrm{d}x$ et en déduire la valeur exacte de $\mathcal{A}$.

3) L'indice de Gini de cette répartition est le nombre $G = 2\mathcal{A}$. Calculer G. Dans un second pays, l'indice de Gini vaut $0{,}4$: lequel des deux pays a la répartition des revenus la plus inégalitaire ? Justifier.

Exercice 3 — L'aire sous l'hyperbole

8 points

Au XVII$^{\text{e}}$ siècle, Grégoire de Saint-Vincent étudie l'aire située sous l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{t}$. Pour tout réel $x \geqslant 1$, on note $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ l'aire, en unités d'aire, du domaine compris entre l'hyperbole, l'axe des abscisses et les droites d'équations $t = 1$ et $t = x$.

1) Que vaut $F(1)$? Justifier.

2) Énoncer le théorème du cours qui assure que F est dérivable sur $[1\,;+\infty[$, et donner $F'(x)$.

3) En déduire que, pour tout réel $x \geqslant 1$, $F(x) = \ln x$. *On rappelle que deux fonctions qui ont la même dérivée sur un intervalle diffèrent d'une constante.*

4) La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ est décroissante sur $[1\,;2]$. En comparant l'aire $F(2)$ à celles de deux rectangles de largeur 1, montrer que $\dfrac{1}{2} \leqslant \ln 2 \leqslant 1$.