Exercice 1

5,5 points

1) Sur le graphique, la courbe part du point d'ordonnée 34 : $\boxed{f(0) = 34}$. En $t = 40$, l'ordonnée est un peu inférieure à 45 : $\boxed{f(40) \approx 44}$.
Interprétation : en 1980, l'eau de la nappe contenait 34 mg/L de nitrates.
Contrôle par le calcul : $f(0) = 46 - 12\,\mathrm{e}^{0} = 34$ et $f(40) = 46 - 12\,\mathrm{e}^{-2} \approx 44{,}4$.

2) f est dérivable sur $[0\,;40]$ et, comme $\left(\mathrm{e}^{-0{,}05t}\right)' = -0{,}05\,\mathrm{e}^{-0{,}05t}$:

$$f'(t) = -12 \times (-0{,}05)\,\mathrm{e}^{-0{,}05t} = \boxed{0{,}6\,\mathrm{e}^{-0{,}05t}}.$$

Une exponentielle est strictement positive, donc $f'(t) > 0$ sur $[0\,;40]$: f **est croissante** sur $[0\,;40]$. Le minimum de f est donc $f(0) = 34$ et son maximum $f(40)$. La valeur moyenne d'une fonction continue est comprise entre son minimum et son maximum, d'où $\boxed{34 \leqslant m \leqslant f(40)}$, soit $34 \leqslant m \leqslant 44{,}4$ environ.

3) f est positive sur $[0\,;40]$, donc I est l'aire, en unités d'aire, du domaine situé entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations $t = 0$ et $t = 40$. Un carreau du quadrillage a pour aire $5 \times 5 = 25$ unités d'aire.

- Le rectangle de largeur 40 et de hauteur 34 (sous la droite $y = 34$) a pour aire $40 \times 34 = 1\,360$.
- Au-dessus de ce rectangle, entre la droite $y = 34$ et la courbe, on compte environ 11 carreaux (une bande qui monte de 0 à 10 mg/L sur 40 ans), soit $11 \times 25 \approx 275$.

D'où $I \approx 1\,360 + 275$, soit $\boxed{I \approx 1\,630}$ (toute estimation entre $1\,600$ et $1\,660$ est acceptable).

4) F est dérivable sur $[0\,;40]$ et

$$F'(t) = 46 + 240 \times (-0{,}05)\,\mathrm{e}^{-0{,}05t} = 46 - 12\,\mathrm{e}^{-0{,}05t} = f(t),$$

donc F est une primitive de f sur $[0\,;40]$. Alors

$$I = F(40) - F(0) = \left(46 \times 40 + 240\,\mathrm{e}^{-2}\right) - (0 + 240) = \boxed{1\,600 + 240\,\mathrm{e}^{-2}} \approx \boxed{1\,632{,}5}.$$

Cette valeur est cohérente avec l'estimation de la question 3.

5) La valeur moyenne de f sur $[0\,;40]$ est

$$m = \frac{1}{40 - 0}\int_0^{40} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1\,600 + 240\,\mathrm{e}^{-2}}{40} = 40 + 6\,\mathrm{e}^{-2} \approx \boxed{40{,}8}.$$

On vérifie que $34 \leqslant 40{,}8 \leqslant 44{,}4$.
Interprétation : en moyenne, sur la période 1980-2020, l'eau de la nappe a contenu environ $40{,}8$ mg/L de nitrates. Comme $40{,}8 < 50$, l'eau est restée, en moyenne, sous le seuil de potabilité ; la concentration augmente toutefois et approche 45 mg/L en 2020.

Exercice 2

8 points

1) Avec $g(x) = x\,\mathrm{e}^x$:

x_k	0	0,25	0,5	0,75
$g(x_k)$	0	0,321	0,824	1,588

Chaque rectangle a pour largeur $h = 0{,}25$ et pour hauteur $g(x_k)$, donc

$$R_4 = 0{,}25 \times (0 + 0{,}321 + 0{,}824 + 1{,}588) = 0{,}25 \times 2{,}733 \approx \boxed{0{,}683}.$$

(Le premier rectangle, de hauteur $g(0) = 0$, est réduit à un segment : il n'apparaît pas sur la figure.)

2) g est un produit : $g = uv$ avec $u(x) = x$, $u'(x) = 1$, $v(x) = \mathrm{e}^x$, $v'(x) = \mathrm{e}^x$. Donc

$$g'(x) = 1 \times \mathrm{e}^x + x\,\mathrm{e}^x = \boxed{(x+1)\,\mathrm{e}^x}.$$

Sur $[0\,;1]$, $x + 1 > 0$ et $\mathrm{e}^x > 0$, donc $g'(x) > 0$: g **est croissante sur** $[0\,;1]$.
Sur chaque intervalle $[x_k\,;x_{k+1}]$, la hauteur $g(x_k)$ du rectangle est la plus petite valeur de g (car g est croissante) : chaque rectangle est situé **sous** la courbe. La somme des aires des rectangles est donc inférieure à l'aire sous la courbe : $\boxed{R_n \leqslant I}$.

3) On ajoute à `S` la hauteur $g(x_k) = x_k\,\mathrm{e}^{x_k}$ du rectangle courant, puis on multiplie la somme des hauteurs par la largeur commune h :

```
from math import exp
def rectangles(n):
    h = 1/n
    S = 0
    for k in range(n):
        x = k*h
        S = S + x*exp(x)
    return S*h
```

(Pour $n = 4$, la fonction renvoie $0{,}683$, comme à la question 1.)

4) Les valeurs $0{,}8678$; $0{,}9864$; $0{,}9986$ augmentent (ce qui est normal, chaque R_n étant inférieur à I) et se rapprochent de 1 : on peut conjecturer que $\boxed{I = 1}$.

5) Pour prendre l'extrémité **droite** $x_{k+1} = (k+1)h$ de chaque intervalle, il suffit de parcourir les entiers de 1 à n : on remplace la ligne `for k in range(n):` par

```
for k in range(1, n+1):
```

(ou, au choix, on remplace `x = k*h` par `x = (k+1)*h`).
Comme g est croissante, chaque rectangle « à droite » a pour hauteur la plus grande valeur de g sur son intervalle : il contient la portion de domaine située sous la courbe, donc la somme de leurs aires est supérieure à I. Avec $n = 100$:

$$\underbrace{0{,}9864}_{\text{rectangles à gauche}} \leqslant I \leqslant \underbrace{1{,}0136}_{\text{rectangles à droite}}.$$

Remarque : l'écart entre les deux sommes vaut $h\,(g(1) - g(0)) = \dfrac{\mathrm{e}}{100} \approx 0{,}027$.

6) $G = uv$ avec $u(x) = x - 1$, $u'(x) = 1$, $v(x) = \mathrm{e}^x$, $v'(x) = \mathrm{e}^x$:

$$G'(x) = 1 \times \mathrm{e}^x + (x-1)\,\mathrm{e}^x = (1 + x - 1)\,\mathrm{e}^x = x\,\mathrm{e}^x = g(x).$$

Donc G est une primitive de g sur $[0\,;1]$, et

$$I = G(1) - G(0) = (1-1)\,\mathrm{e}^1 - (0-1)\,\mathrm{e}^0 = 0 + 1 = \boxed{1}.$$

C'est exactement la valeur conjecturée à la question 4, et 1 appartient bien à l'encadrement $[0{,}9864\,;1{,}0136]$ de la question 5 : les résultats sont cohérents.

Exercice 3

3 points

- Une primitive de $x \longmapsto 3x^2 - 2x + 1$ est $x \longmapsto x^3 - x^2 + x$, donc $A = \left[x^3 - x^2 + x\right]_0^2 = (8 - 4 + 2) - 0 = \boxed{6}$.
- Une primitive de $x \longmapsto \dfrac{2}{x}$ sur $[1\,;\mathrm{e}]$ est $x \longmapsto 2\ln x$, donc $B = [2\ln x]_1^{\mathrm{e}} = 2\ln \mathrm{e} - 2\ln 1 = \boxed{2}$.
- Une primitive de $x \longmapsto \mathrm{e}^{2x}$ est $x \longmapsto \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$, donc $C = \left[\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right]_0^1 = \dfrac{\mathrm{e}^2}{2} - \dfrac{1}{2} = \boxed{\dfrac{\mathrm{e}^2 - 1}{2}}$ $(\approx 3{,}19)$.
- $2x\,\mathrm{e}^{x^2}$ est de la forme $u'\,\mathrm{e}^u$ avec $u(x) = x^2$, donc une primitive est $x \longmapsto \mathrm{e}^{x^2}$ et $D = \left[\mathrm{e}^{x^2}\right]_0^1 = \mathrm{e} - 1$, soit $\boxed{D = \mathrm{e} - 1}$ $(\approx 1{,}72)$.

Exercice 4

2,5 points

1) Une primitive de h est $x \longmapsto 4x - \dfrac{x^3}{3}$, donc

$$m = \frac{1}{2-0}\int_0^2 (4 - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left(8 - \frac{8}{3}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{16}{3} = \boxed{\frac{8}{3}}.$$

2) Sur $[0\,;2]$, h est décroissante (car x^2 est croissante sur $[0\,;2]$) : son maximum est $h(0) = 4$ et son minimum $h(2) = 0$. La valeur moyenne d'une fonction continue sur un intervalle est comprise entre son minimum et son maximum, donc $\boxed{0 \leqslant m \leqslant 4}$; on a bien $0 \leqslant \dfrac{8}{3} \leqslant 4$.

3) $h(c) = m \iff 4 - c^2 = \dfrac{8}{3} \iff c^2 = \dfrac{4}{3} \iff c = \sqrt{\dfrac{4}{3}}$ ou $c = -\sqrt{\dfrac{4}{3}}$. Seule la solution positive est dans $[0\,;2]$:

$$\boxed{c = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}15}.$$

Interprétation : le rectangle de base $[0\,;2]$ et de hauteur $m = h(c)$ a la même aire que le domaine situé sous la courbe de h.

Exercice 5

1 point

Question ouverte : toute démarche cohérente est valorisée (calcul de $m(T)$, essais de valeurs, comparaison avec la limite de f, limite de m).

Première piste : la concentration elle-même. Pour tout $t \geqslant 0$, $\mathrm{e}^{-0{,}05t} > 0$ donc $f(t) = 46 - 12\,\mathrm{e}^{-0{,}05t} < 46$, et $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 46$. La concentration ne dépasse jamais 46 mg/L ; une moyenne de valeurs toutes inférieures à 46 est elle-même inférieure à 46, donc $m(T) < 46 < 50$ pour tout T.

Seconde piste : le calcul de $m(T)$. Pour $T > 0$, avec la primitive F de l'exercice 1 :

$$m(T) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{F(T) - F(0)}{T} = \frac{46T + 240\,\mathrm{e}^{-0{,}05T} - 240}{T} = 46 - \frac{240\left(1 - \mathrm{e}^{-0{,}05T}\right)}{T}.$$

- Comme $0 < 1 - \mathrm{e}^{-0{,}05T} < 1$, le terme soustrait est strictement positif : $m(T) < 46$ pour tout $T > 0$. Ce terme est compris entre 0 et $\dfrac{240}{T}$, qui tend vers 0 : $m(T)$ se rapproche de 46 quand T devient grand, en restant en dessous.
- Essais à la calculatrice : $m(40) \approx 40{,}8$; $m(100) \approx 43{,}6$; $m(200) \approx 44{,}8$; $m(300) \approx 45{,}2$; $m(1000) \approx 45{,}8$. La moyenne ne franchit 45 mg/L qu'au bout d'environ 240 ans et n'atteint jamais 46.

Le riverain a tort : selon ce modèle, $m(T) < 46 < 50$ pour tout T, et $m(T)$ se stabilise vers 46 mg/L.

Commentaire : l'eau resterait potable en moyenne, mais avec une marge faible (4 mg/L sous le seuil) ; et le modèle, construit sur quarante ans de relevés, ne garantit rien sur un horizon aussi lointain (changement de pratiques agricoles, pluviométrie).