Calculatrice autorisée (mode examen)
Toutes les réponses doivent être justifiées, sauf mention contraire.

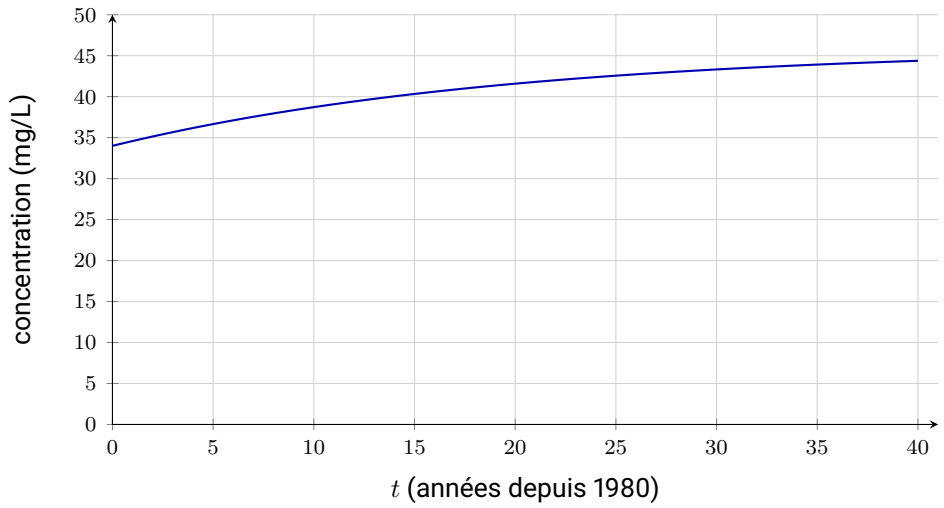
Exercice 1

5,5 points

La courbe ci-dessous représente la concentration en nitrates, en mg/L, de l'eau d'une nappe phréatique située en zone agricole, en fonction du temps t écoulé depuis 1980, en années (ordres de grandeur lissés à partir de relevés annuels). On admet que cette concentration est modélisée, pour $t \in [0\,;40]$, par la fonction f définie par

$$f(t) = 46 - 12\,\mathrm{e}^{-0{,}05t}.$$

Dans le quadrillage, un carreau mesure 5 ans en abscisse et 5 mg/L en ordonnée. L'eau est considérée comme potable tant que sa concentration en nitrates ne dépasse pas 50 mg/L.



1) Par lecture graphique, donner $f(0)$ et une valeur approchée de $f(40)$. Interpréter $f(0)$ dans le contexte.

2) Calculer $f'(t)$ et en déduire que f est croissante sur $[0\,;40]$. Justifier alors que la valeur moyenne m de f sur $[0\,;40]$ vérifie $34 \leqslant m \leqslant f(40)$.

3) On note $I = \displaystyle\int_0^{40} f(t)\,\mathrm{d}t$. À l'aide du quadrillage, donner une estimation de I. *On pourra découper le domaine situé sous la courbe en un rectangle et une partie dont on comptera les carreaux.*

4) Montrer que la fonction F définie sur $[0\,;40]$ par $F(t) = 46t + 240\,\mathrm{e}^{-0{,}05t}$ est une primitive de f. En déduire la valeur exacte de I, puis une valeur approchée au dixième.

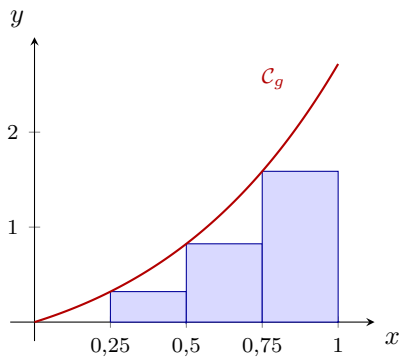
5) Calculer la valeur moyenne m de f sur $[0\,;40]$, arrondie au dixième, et interpréter ce nombre dans le contexte. L'eau de la nappe est-elle restée, en moyenne, sous le seuil de potabilité ?

Exercice 2

8 points

On considère la fonction g définie sur $[0\,;1]$ par $g(x) = x\,\mathrm{e}^x$ et on note $I = \displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$. Aucune primitive de g n'est immédiate : on commence par chercher une valeur approchée de I par la **méthode des rectangles**.

On partage $[0\,;1]$ en n intervalles de même longueur $h = \dfrac{1}{n}$. Sur chaque intervalle $[x_k\,;x_{k+1}]$, avec $x_k = k\,h$, on construit le rectangle de largeur h et de hauteur $g(x_k)$ (valeur de g à l'extrémité **gauche**). La figure ci-contre correspond à $n = 4$. On note R_n la somme des aires de ces n rectangles.



1) Pour $n = 4$, recopier et compléter le tableau ci-dessous (valeurs arrondies à 10^{-3}), puis calculer R_4.

x_k	0	0,25	0,5	0,75
$g(x_k)$				

2) Montrer que $g'(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^x$ et en déduire que g est croissante sur $[0\,;1]$. Expliquer pourquoi $R_n \leqslant I$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

3) La fonction Python ci-contre doit renvoyer R_n. Recopier et compléter les deux lignes incomplètes.

```
from math import exp
def rectangles(n):
    h = 1/n
    S = 0
    for k in range(n):
        x = k*h
        S = S + ...
    return ...
```

4) On a exécuté la fonction pour plusieurs valeurs de n :

n	10	100	1 000
`rectangles(n)`	0,8678	0,9864	0,9986

Quelle conjecture peut-on faire sur la valeur de I ?

5) On modifie la fonction pour que la hauteur de chaque rectangle soit la valeur de g à l'extrémité **droite** de l'intervalle. Indiquer la ligne à modifier et la nouvelle ligne. Pour $n = 100$, cette nouvelle fonction renvoie $1{,}0136$. Justifier l'encadrement $0{,}9864 \leqslant I \leqslant 1{,}0136$.

6) Soit G la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $G(x) = (x-1)\,\mathrm{e}^x$. Montrer que G est une primitive de g sur $[0\,;1]$, puis calculer la valeur exacte de I. Ce résultat est-il cohérent avec les questions précédentes ?

Exercice 3

3 points

Calculer la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes.

$$A = \int_0^2 \left(3x^2 - 2x + 1\right) \mathrm{d}x \qquad B = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{2}{x} \mathrm{d}x \qquad C = \int_0^1 \mathrm{e}^{2x} \mathrm{d}x \qquad D = \int_0^1 2x\,\mathrm{e}^{x^2} \mathrm{d}x$$

Exercice 4

2,5 points

Soit h la fonction définie sur $[0\,;2]$ par $h(x) = 4 - x^2$.

1) Calculer la valeur moyenne m de h sur $[0\,;2]$.

2) Sans calcul d'intégrale, expliquer pourquoi on pouvait prévoir que $0 \leqslant m \leqslant 4$.

3) Déterminer la valeur exacte du réel c de $[0\,;2]$ tel que $h(c) = m$, puis en donner une valeur approchée au centième.

Exercice 5

1 point

On reprend le modèle de l'exercice 1 et on suppose qu'il reste valable après 2020. Pour tout réel $T > 0$, on note $m(T)$ la valeur moyenne de f sur $[0\,;T]$, c'est-à-dire la concentration moyenne en nitrates de la nappe entre 1980 et l'année $1980 + T$.

Un riverain s'inquiète : « si rien ne change, la concentration moyenne depuis 1980 finira par dépasser le seuil de potabilité de 50 mg/L ». Selon ce modèle, a-t-il raison ? Vers quelle valeur la concentration moyenne $m(T)$ se stabilise-t-elle à long terme ? *Toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte.*