Exercice 1 — Un tableau de primitives

5 points

Chaque primitive se vérifie en dérivant F.

$f(x)$	I	forme reconnue	une primitive F
e^{3x}	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{3}\,u'\mathrm{e}^{u}$ avec $u(x)=3x$	$F(x)=\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{3x}$
$6x^2-\frac{1}{x^2}$	$]0\,;+\infty[$	fonctions de référence	$F(x)=2x^3+\frac{1}{x}$
$2x\,\mathrm{e}^{x^2}$	$\mathbb{R}$	$u'\mathrm{e}^{u}$ avec $u(x)=x^2$, $u'(x)=2x$	$F(x)=\mathrm{e}^{x^2}$
$\frac{1}{2x+1}$	$\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$	$\frac{1}{2}\,\frac{u'}{u}$ avec $u(x)=2x+1>0$	$F(x)=\frac{1}{2}\ln(2x+1)$
$(2x+3)\left(x^2+3x+1\right)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{2}\times 2u'u$, $u(x)=x^2+3x+1$	$F(x)=\frac{1}{2}\left(x^2+3x+1\right)^2$
$\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+2}$	$\mathbb{R}$	$\frac{u'}{u}$ avec $u(x)=\mathrm{e}^x+2>0$	$F(x)=\ln\left(\mathrm{e}^x+2\right)$

Détails. Ligne 2 : $\left(2x^3\right)'=6x^2$ et $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$, donc $\left(2x^3+\frac{1}{x}\right)'=6x^2-\frac{1}{x^2}$. Ligne 4 : $u'(x)=2$, donc $\frac{1}{2x+1}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{2x+1}$. Ligne 5 : $u'(x)=2x+3$, donc $f=u'u=\frac{1}{2}\times 2u'u$, et $\left(\frac{1}{2}u^2\right)'=u'u$. Ligne 6 : $u'(x)=\mathrm{e}^x$.

Exercice 2 — La méthode d'Euler

8 points

1) **a.** Avec $h=0{,}5$: $y_{n+1}=y_n+0{,}5\times 0{,}5\,y_n=y_n+0{,}25\,y_n=\boxed{1{,}25\,y_n}$.
La suite (y_n) est donc **géométrique** de raison $1{,}25$ et de premier terme $y_0=1$: $y_n=1{,}25^n$.

b. On multiplie par $1{,}25$ à chaque étape :

n	0	1	2	3	4
t_n	0	0,5	1	1,5	2
y_n	1	1,25	1,563	1,953	2,441

(Valeurs exactes : $1{,}25$; $1{,}5625$; $1{,}953125$; $2{,}44140625$.)

2) Les solutions de $y'=0{,}5\,y$ sont les fonctions $t\longmapsto C\,\mathrm{e}^{0{,}5t}$, $C\in\mathbb{R}$. La condition $g(0)=1$ donne $C=1$:

$$\boxed{g(t)=\mathrm{e}^{0{,}5t}}.$$

Donc $g(2)=\mathrm{e}^1=\mathrm{e}\approx\boxed{2{,}718}$. La valeur $y_4\approx 2{,}441$ obtenue par la méthode d'Euler est une approximation assez grossière de $g(2)$ (erreur d'environ $0{,}28$, soit $10\,\%$) : le pas $h=0{,}5$ est trop grand.

3) À chaque tour de boucle, on ajoute $h\times 0{,}5\times y$ (la pente $g'(t)=0{,}5\,g(t)$ est remplacée par $0{,}5\,y$), et la fonction renvoie la dernière valeur de y :

```
def euler(h):
    n = round(2 / h)
    y = 1
    for i in range(n):
        y = y + h * 0.5 * y
    return y
```

(Le nombre de pas $n = 2/h$ amène bien t de 0 à 2 ; la variable `t` n'est pas nécessaire ici, car la pente ne dépend que de y.)

4) Lorsque le pas h diminue, les valeurs renvoyées augmentent et se rapprochent de $\boxed{\mathrm{e} \approx 2{,}718}$, la valeur exacte de $g(2) : 2{,}441$ (erreur $0{,}28$), $2{,}653$ (erreur $0{,}07$), $2{,}712$ (erreur $0{,}007$), $2{,}718$ (erreur inférieure à 10^{-3}). Plus le pas est petit, plus la méthode d'Euler est précise, au prix d'un plus grand nombre de calculs.
(Pour $h = 2/n$, la méthode calcule $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, qui tend vers e.)

5) **a.** Dans la ligne `y = y + h * 0.5 * t`, la pente utilisée est $0{,}5\,t$ au lieu de $0{,}5\,y$: la fonction applique la méthode d'Euler à l'équation $y' = 0{,}5\,t$, dont la solution vérifiant $y(0) = 1$ est $t \longmapsto 1 + \dfrac{t^2}{4}$ (valeur 2 en $t = 2$). Avec $h = 0{,}5$, on obtient successivement $1 + 0{,}125 = 1{,}125$; $1{,}375$; $1{,}75$; $2{,}25$: c'est bien la valeur $2{,}25$ renvoyée.
$\boxed{\text{L'erreur : la variable } \texttt{t} \text{ remplace } \texttt{y} \text{ dans le calcul de la pente}}$.

b. Il suffit de remplacer la ligne fautive par :

```
y = y + h * 0.5 * y
```

(La variable `t` devient alors inutile ; la laisser ne gêne pas.)

Exercice 3 — Une culture de levures

7 points

Partie A — Croissance exponentielle

1) Les solutions de $y' = 0{,}3\,y$ sur $[0\,;+\infty[$ sont les fonctions $t \longmapsto C\,\mathrm{e}^{0{,}3t}$, $C \in \mathbb{R}$. Comme $N(0) = 5$, on a $C = 5$:

$$\boxed{N(t) = 5\,\mathrm{e}^{0{,}3t}}.$$

2) $N(t) = 10 \iff 5\,\mathrm{e}^{0{,}3t} = 10 \iff \mathrm{e}^{0{,}3t} = 2 \iff 0{,}3t = \ln 2 \iff t = \dfrac{\ln 2}{0{,}3}$.

Le temps de doublement est $\boxed{\dfrac{\ln 2}{0{,}3} \approx 2{,}31 \text{ h}}$, soit $2{,}31 \times 60 \approx 138{,}6$ min : environ **2 h 19 min**. *(Il ne dépend pas de la population initiale.)*

3) $\lim\limits_{t \to +\infty} 0{,}3t = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$, donc $\lim\limits_{t \to +\infty} N(t) = \boxed{+\infty}$.
Une population qui croît sans limite est impossible dans une cuve : les nutriments (sucres du moût) s'épuisent et l'alcool produit freine les levures. Le modèle exponentiel ne décrit que le début de la fermentation.

Partie B — Un modèle plus réaliste

1) $g(0) = \dfrac{80}{1+15\,\mathrm{e}^{0}} = \dfrac{80}{16} = \boxed{5}$: g vérifie la condition initiale.

2) **a.** $g = \dfrac{80}{v}$ avec $v(t) = 1+15\,\mathrm{e}^{-0{,}3t}$, donc $v'(t) = 15\times(-0{,}3)\,\mathrm{e}^{-0{,}3t} = -4{,}5\,\mathrm{e}^{-0{,}3t}$.

Par la formule de dérivation d'un inverse, $\left(\dfrac{k}{v}\right)' = -\dfrac{k\,v'}{v^2}$, on obtient :

$$g'(t) = -\frac{80\times\left(-4{,}5\,\mathrm{e}^{-0{,}3t}\right)}{\left(1+15\,\mathrm{e}^{-0{,}3t}\right)^2} = \boxed{\frac{360\,\mathrm{e}^{-0{,}3t}}{\left(1+15\,\mathrm{e}^{-0{,}3t}\right)^2}}.$$

b. Posons $D = 1+15\,\mathrm{e}^{-0{,}3t}$, de sorte que $g(t) = \dfrac{80}{D}$. Alors

$$1-\frac{g(t)}{80} = 1-\frac{1}{D} = \frac{D-1}{D} = \frac{15\,\mathrm{e}^{-0{,}3t}}{D},$$

donc $$0{,}3\,g(t)\left(1-\frac{g(t)}{80}\right) = 0{,}3\times\frac{80}{D}\times\frac{15\,\mathrm{e}^{-0{,}3t}}{D} = \frac{360\,\mathrm{e}^{-0{,}3t}}{D^2} = \frac{360\,\mathrm{e}^{-0{,}3t}}{\left(1+15\,\mathrm{e}^{-0{,}3t}\right)^2}.$$

On retrouve exactement $g'(t)$: pour tout $t \geqslant 0$, $g'(t) = 0{,}3\,g(t)\left(1-\dfrac{g(t)}{80}\right)$, donc $\boxed{g \text{ est solution de } (L)}$, et comme $g(0) = 5$, c'est le modèle logistique de la cuve.

3) $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0{,}3t} = 0$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(1+15\,\mathrm{e}^{-0{,}3t}\right) = 1$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = \boxed{80}$.

Pour le brasseur : la population de levures ne dépasse jamais 80 millions de cellules par millilitre et se stabilise à ce niveau, la *capacité* de la cuve ; au-delà, inutile d'attendre davantage de levures.