Calculatrice autorisée (mode examen)

Exercice 1 — Un tableau de primitives

5 points

Recopier et compléter le tableau ci-dessous : pour chaque fonction f, indiquer la forme reconnue (fonction de référence, $u'\mathrm{e}^u$, $\dfrac{u'}{u}$ ou $2u'u$) en précisant u, puis donner une primitive F de f sur l'intervalle I. La première ligne est donnée en exemple.

$f(x)$	I	forme reconnue	une primitive F
e^{3x}	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{3}\,u'\mathrm{e}^u$ avec $u(x)=3x$	$F(x)=\dfrac{1}{3}\,\mathrm{e}^{3x}$
$6x^2-\dfrac{1}{x^2}$	$]0\,;+\infty[$		
$2x\,\mathrm{e}^{x^2}$	$\mathbb{R}$		
$\dfrac{1}{2x+1}$	$\left]-\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$		
$(2x+3)\left(x^2+3x+1\right)$	$\mathbb{R}$		
$\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+2}$	$\mathbb{R}$		

Exercice 2 — La méthode d'Euler

8 points

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 0{,}5\,y$ et l'on cherche la solution g de (E) qui vérifie $g(0)=1$, sur l'intervalle $[0\,;2]$.
La **méthode d'Euler** consiste à découper $[0\,;2]$ en petits pas de longueur h et à remplacer, sur chaque pas, la courbe par sa tangente : si y_n est la valeur approchée de $g(t_n)$, alors $y_{n+1} = y_n + h \times g'(t_n) \approx y_n + h \times 0{,}5\,y_n$, avec $t_0=0$, $y_0=1$ et $t_{n+1}=t_n+h$.

1) On prend $h = 0{,}5$.

a. Justifier que, pour tout entier naturel n, $y_{n+1} = 1{,}25\,y_n$. Quelle est la nature de la suite (y_n) ?

b. Recopier et compléter le tableau (valeurs arrondies au millième) :

n	0	1	2	3	4
t_n	0	0,5	1	1,5	2
y_n	1				

2) Résoudre l'équation différentielle (E) et déterminer l'expression de $g(t)$. Calculer $g(2)$ arrondi au millième et comparer à y_4.

3) La fonction Python ci-contre doit renvoyer la valeur approchée de $g(2)$ obtenue par la méthode d'Euler avec le pas `h` (on suppose que $2/\mathtt{h}$ est un entier). Recopier et compléter les deux lignes incomplètes.

```
def euler(h):
    n = round(2 / h)
    y = 1
    for i in range(n):
        y = y + h * ...
    return ...
```

4) On a exécuté la fonction pour plusieurs valeurs de `h` :

`h`	0,5	0,1	0,01	0,001
`euler(h)`	2,441	2,653	2,712	2,718

Que constate-t-on lorsque le pas h diminue ? Vers quelle valeur les résultats semblent-ils tendre ?

5) Un élève propose la version ci-contre, qui ne renvoie pas le bon résultat : pour `h = 0.5`, elle renvoie $2{,}25$.

a. Expliquer ce que calcule réellement cette fonction et repérer l'erreur.

b. Corriger la ligne fautive.

```
def euler2(h):
    n = round(2 / h)
    t = 0
    y = 1
    for i in range(n):
        t = t + h
        y = y + h * 0.5 * t
    return y
```

Exercice 3 — Une culture de levures

7 points

Dans une cuve de brasserie, on ensemence le moût avec des levures à l'instant $t = 0$. On note $N(t)$ le nombre de cellules de levure par millilitre, en millions, t heures après l'ensemencement ; au départ, $N(0) = 5$.

Partie A — Croissance exponentielle

Pendant les premières heures, les nutriments abondent et l'on admet que N est solution sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle $y' = 0{,}3\,y$.

1) Résoudre cette équation différentielle, puis déterminer l'expression de $N(t)$.

2) Déterminer le *temps de doublement* de la population, c'est-à-dire la valeur de t telle que $N(t) = 10$. Donner la valeur exacte, puis l'arrondi à la minute.

3) Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t)$. Pourquoi ce modèle ne peut-il pas rester valable longtemps ?

Partie B — Un modèle plus réaliste

Pour tenir compte de l'épuisement des nutriments, le brasseur adopte le modèle dit *logistique* : N est solution de l'équation différentielle (L) : $y' = 0{,}3\,y\left(1 - \dfrac{y}{80}\right)$. On considère la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(t) = \dfrac{80}{1 + 15\,\mathrm{e}^{-0{,}3t}}$.

1) Vérifier que $g(0) = 5$.

2) **a.** Montrer que, pour tout $t \geqslant 0$, $g'(t) = \dfrac{360\,\mathrm{e}^{-0{,}3t}}{(1 + 15\,\mathrm{e}^{-0{,}3t})^2}$.

b. Montrer que $0{,}3\,g(t)\left(1 - \dfrac{g(t)}{80}\right) = \dfrac{360\,\mathrm{e}^{-0{,}3t}}{(1 + 15\,\mathrm{e}^{-0{,}3t})^2}$ et conclure que g est solution de (L).

3) Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t)$ et interpréter ce résultat pour le brasseur.