Problème — Le lancement d'une gourde isotherme

20 points

Partie A — Les ventes hebdomadaires

(6 points)

1) $f(0) = 300 - 200\,\mathrm{e}^{0} = 300 - 200 = \boxed{100}$: au lancement, le rythme des ventes est de 100 gourdes par semaine.

2) $\lim\limits_{t\to+\infty}(-0{,}2t) = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty}\mathrm{e}^{X} = 0$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-0{,}2t} = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \boxed{300}$.
À long terme, les ventes hebdomadaires se stabilisent autour de 300 gourdes par semaine, sans dépasser ce niveau.

3) $f = 300 - 200\,\mathrm{e}^{u}$ avec $u(t) = -0{,}2t$, $u'(t) = -0{,}2$. Pour tout $t \geqslant 0$:

$$f'(t) = -200 \times (-0{,}2)\,\mathrm{e}^{-0{,}2t} = \boxed{40\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}}.$$

Une exponentielle est strictement positive, donc $f'(t) > 0$: f est **strictement croissante** sur $[0\,;+\infty[$.

t	0		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	
f	100	↗	300

4) Pour $t \geqslant 0$:

$$f(t) \geqslant 250 \iff 300 - 200\,\mathrm{e}^{-0{,}2t} \geqslant 250 \iff -200\,\mathrm{e}^{-0{,}2t} \geqslant -50 \iff \mathrm{e}^{-0{,}2t} \leqslant \frac{1}{4}.$$

La fonction $\ln$ étant strictement croissante :

$$\mathrm{e}^{-0{,}2t} \leqslant \frac{1}{4} \iff -0{,}2t \leqslant \ln\frac{1}{4} = -\ln 4 \iff t \geqslant \frac{\ln 4}{0{,}2} = 5\ln 4.$$

$\mathcal{S} = \boxed{[5\ln 4\,;+\infty[}$ avec $5\ln 4 \approx 6{,}9$: le rythme des ventes dépasse 250 gourdes par semaine **à partir de** $t \approx 6{,}9$**, c'est-à-dire au cours de la septième semaine** après le lancement.

5) La fonction f' est elle-même de la forme $40\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}$: sa dérivée $-8\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}$ est strictement négative, donc f' est **décroissante** sur $[0\,;+\infty[$ (et tend vers 0).
La vitesse d'augmentation des ventes, $f'(t)$, reste positive mais diminue : les ventes augmentent de moins en moins vite, ce qui justifie l'affirmation du fondateur. *(La courbe de f est concave.)*

Partie B — L'équation différentielle des ventes

(8 points)

1) D'après la partie A, $f'(t) = 40\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}$. D'autre part,

$$-0{,}2\,f(t) + 60 = -0{,}2\left(300 - 200\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}\right) + 60 = -60 + 40\,\mathrm{e}^{-0{,}2t} + 60 = 40\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}.$$

Donc $f'(t) = -0{,}2\,f(t) + 60$ pour tout $t \geqslant 0$: $\boxed{f \text{ est solution de } (E)}$.

2) Une fonction constante $g = c$ a une dérivée nulle ; elle est solution de (E) si et seulement si $0 = -0{,}2\,c + 60$, soit $c = \dfrac{60}{0{,}2} = 300$. La solution constante est $\boxed{g = 300}$.

3) Les solutions de $y' = -0{,}2\,y$ sont les fonctions $t \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}$, $C \in \mathbb{R}$.
Les solutions de (E) s'obtiennent en ajoutant la solution constante : ce sont les fonctions

$$\boxed{y(t) = 300 + C\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}, \quad C \in \mathbb{R}}.$$

Vérification : $y'(t) = -0{,}2\,C\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}$ et $-0{,}2\,y(t) + 60 = -60 - 0{,}2\,C\,\mathrm{e}^{-0{,}2t} + 60 = -0{,}2\,C\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}$.

4) $y(0) = 100 \iff 300 + C = 100 \iff C = -200$. La solution cherchée est $t \longmapsto 300 - 200\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}$: $\boxed{\text{on retrouve la fonction } f}$ de la partie A, qui correspond donc à un rythme initial de 100 gourdes par semaine.

5) Solution constante de (E') : $-0{,}2\,c + 120 = 0 \iff c = 600$. Les solutions de (E') sont les fonctions $t \longmapsto 600 + C\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}$. Avec $k(0) = 100$: $600 + C = 100$, soit $C = -500$:

$$\boxed{k(t) = 600 - 500\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}}.$$

6) $f(10) = 300 - 200\,\mathrm{e}^{-2} \approx 272{,}9$, soit $\boxed{f(10) \approx 273}$; $k(10) = 600 - 500\,\mathrm{e}^{-2} \approx 532{,}3$, soit $\boxed{k(10) \approx 532}$.
Dix semaines après le lancement, le rythme des ventes du second scénario est d'environ 532 gourdes par semaine contre 273 : doubler le budget publicitaire fait presque doubler les ventes hebdomadaires (le niveau limite passe de 300 à 600).

7) On cherche les $t \geqslant 0$ tels que $k(t) > 500$:

$$600 - 500\,\mathrm{e}^{-0{,}2t} > 500 \iff \mathrm{e}^{-0{,}2t} < \frac{100}{500} = \frac{1}{5} \iff -0{,}2t < -\ln 5 \iff t > 5\ln 5.$$

Or $5\ln 5 \approx 8{,}05$: le rythme des ventes dépasse 500 gourdes par semaine dès que $t > 8{,}05$, c'est-à-dire $\boxed{\text{au cours de la neuvième semaine}}$. L'atelier ne pourrait alors plus suivre : il faudrait augmenter la capacité de production avant de doubler la publicité.

Partie C — Ventes cumulées et coût de production **(6 points)**

1) Une primitive de 300 est $300t$. Pour $-200\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}$, on reconnaît la forme $u'\mathrm{e}^u$ avec $u(t) = -0{,}2t$: $-200\,\mathrm{e}^{-0{,}2t} = 1000 \times \left(-0{,}2\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}\right)$, dont une primitive est $1000\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}$. Ainsi

$$\boxed{F(t) = 300t + 1000\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}}.$$

Vérification : $F'(t) = 300 + 1000 \times (-0{,}2)\,\mathrm{e}^{-0{,}2t} = 300 - 200\,\mathrm{e}^{-0{,}2t} = f(t)$.

2) $F(0) = 1000$ et $F(10) = 3000 + 1000\,\mathrm{e}^{-2} \approx 3135{,}3$, donc

$$N(10) = F(10) - F(0) = 2000 + 1000\,\mathrm{e}^{-2} \approx 2135{,}3, \qquad \boxed{N(10) \approx 2\,135 \text{ gourdes}}.$$

En dix semaines, l'entreprise a vendu environ $2\,135$ gourdes.

3) **a.** Une primitive de 6 est $6q$. Pour $\dfrac{400}{q+50}$, on reconnaît $400\,\dfrac{u'}{u}$ avec $u(q) = q+50 > 0$ sur $[0\,;+\infty[$ et $u'(q) = 1$: une primitive est $400\ln(q+50)$. Les primitives de C_m sont les fonctions

$$\boxed{q \longmapsto 6q + 400\ln(q+50) + K, \quad K \in \mathbb{R}}.$$

b. $C(0) = 20\,000 \iff 400\ln 50 + K = 20\,000 \iff K = 20\,000 - 400\ln 50$. Donc

$$\boxed{C(q) = 6q + 400\ln(q+50) + 20\,000 - 400\ln 50}, \quad \text{soit } C(q) = 6q + 400\ln\frac{q+50}{50} + 20\,000.$$

c. $C(2\,135) = 12\,810 + 400\ln(2\,185) + 20\,000 - 400\ln 50 \approx 34\,320{,}94$ €, d'où un coût moyen

$$\frac{C(2\,135)}{2\,135} \approx \boxed{16{,}08 \text{ €}} \text{ par gourde.}$$

Chaque gourde est vendue 25 € pour un coût moyen d'environ $16{,}08$ € : la recette des dix premières semaines, $25 \times 2\,135 = 53\,375$ €, dépasse le coût total $C(2\,135) \approx 34\,321$ €. L'entreprise gagne de l'argent : environ $19\,000$ € sur ses dix premières semaines, coûts fixes compris.