Calculatrice autorisée (mode examen)
Le résultat d'une question peut être admis pour traiter les suivantes.

Problème — Le lancement d'une gourde isotherme

20 points

Une jeune entreprise lance une gourde isotherme réutilisable, vendue 25 € pièce. Le problème étudie l'évolution des ventes après le lancement (parties A et B), puis les quantités vendues et le coût de production (partie C).

Partie A — Les ventes hebdomadaires

(6 points)

On note t le temps écoulé depuis le lancement, en semaines, et $f(t)$ le rythme des ventes, en gourdes par semaine, à l'instant t. On admet dans cette partie que, pour tout $t \geqslant 0$,

$$f(t) = 300 - 200\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}.$$

1) Calculer $f(0)$ et interpréter ce nombre.

2) Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$. Que peut-on en déduire pour les ventes hebdomadaires à long terme ?

3) Montrer que, pour tout $t \geqslant 0$, $f'(t) = 40\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}$. En déduire le sens de variation de f sur $[0\,;+\infty[$ et dresser son tableau de variations.

4) Résoudre dans $[0\,;+\infty[$ l'inéquation $f(t) \geqslant 250$ (valeur exacte, puis arrondie au dixième). À partir de quand le rythme des ventes dépasse-t-il 250 gourdes par semaine ?

5) Le fondateur affirme : « les ventes hebdomadaires augmentent, mais de moins en moins vite ». Justifier cette affirmation à l'aide de la fonction f'.

Partie B — L'équation différentielle des ventes

(8 points)

Le service marketing a construit le modèle suivant : d'une semaine à l'autre, la campagne de publicité apporte 60 ventes hebdomadaires supplémentaires, mais le marché se sature et les ventes perdent $20\,\%$ de leur niveau. Le rythme des ventes $y(t)$, en gourdes par semaine, est alors solution, sur $[0\,;+\infty[$, de l'équation différentielle

$$(E) : \quad y' = -0{,}2\,y + 60.$$

1) Vérifier que la fonction f de la partie A est solution de (E).

2) Déterminer la solution constante g de (E).

3) Rappeler les solutions sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle $y' = -0{,}2\,y$. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

4) Déterminer la solution de (E) qui vérifie $y(0) = 100$. Que retrouve-t-on ?

5) Un second scénario double le budget publicitaire : les ventes vérifient alors

$$(E') : \quad y' = -0{,}2\,y + 120, \qquad \text{avec toujours } y(0) = 100.$$

Déterminer l'expression de la solution k de (E') vérifiant $k(0) = 100$.

6) Calculer $f(10)$ et $k(10)$, arrondis à l'unité. Comparer les deux scénarios dix semaines après le lancement.

7) L'atelier peut produire au plus 500 gourdes par semaine. Dans le second scénario, à partir de quand la production ne suffirait-elle plus à la demande ? Justifier par une inéquation.

Partie C — Ventes cumulées et coût de production **(6 points)**

On revient au premier scénario : le rythme des ventes, en gourdes par semaine, est donné par $f(t) = 300 - 200\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}$.

1) Déterminer une primitive F de f sur $[0\,;+\infty[$.

2) On admet que le nombre total de gourdes vendues entre le lancement et l'instant T est $N(T) = F(T) - F(0)$. Calculer $N(10)$, arrondi à l'unité.

3) Le coût de production, en euros, de la q-ième gourde fabriquée est modélisé par le *coût marginal*

$$C_m(q) = 6 + \frac{400}{q+50} \qquad (q \geqslant 0),$$

et l'on admet que le coût total $C(q)$ de fabrication de q gourdes est la primitive de C_m sur $[0\,;+\infty[$ qui vérifie $C(0) = 20\,000$ (coûts fixes : moules, machines).

a. Déterminer les primitives de C_m sur $[0\,;+\infty[$. On précisera la forme reconnue.

b. En déduire l'expression de $C(q)$.

c. Calculer le *coût moyen* $\dfrac{C(q)}{q}$ d'une gourde pour $q = 2\,135$ (arrondir au centime). L'entreprise gagne-t-elle de l'argent sur ses dix premières semaines ? Justifier.