Exercice 1 (20 min)

4,5 points

1) On reconnaît chaque fois la dérivée d'une fonction connue (on vérifie en dérivant).

a. Primitives des fonctions de référence : $\boxed{F(x) = x^3 - 2x^2 + x}$ (en effet $F'(x) = 3x^2 - 4x + 1$).

b. f est de la forme $\frac{1}{2}u'\mathrm{e}^u$ avec $u(x) = 2x$, $u'(x) = 2$: $\boxed{F(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}}$.

c. Sur $]0\,;+\infty[$, $\left(-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$, donc $\boxed{F(x) = -\frac{1}{x}}$.

d. $f = \frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2 + 1 > 0$ et $u'(x) = 2x$: $\boxed{F(x) = \ln\left(x^2+1\right)}$.

e. $f = u'\mathrm{e}^u$ avec $u(x) = x^2 + x$ et $u'(x) = 2x + 1$: $\boxed{F(x) = \mathrm{e}^{x^2+x}}$.

2) **a.** Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \longmapsto x^2 - 3x + C$, $C \in \mathbb{R}$. La condition $F(1) = 2$ donne $1 - 3 + C = 2$, soit $C = 4$:

$$\boxed{F(x) = x^2 - 3x + 4}.$$

b. $G'(x) = 2x - 3 = f(x)$ pour tout réel x : G est bien une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
$F(x) - G(x) = \left(x^2 - 3x + 4\right) - \left(x^2 - 3x + 1\right) = \boxed{3}$.
On retrouve que deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante.

3) H et K sont deux primitives de g sur l'intervalle $\mathbb{R}$: il existe un réel C tel que $K(x) = H(x) + C$ pour tout réel x. En $x = 0$: $C = K(0) - H(0) = 5 - 1 = 4$. Donc $K(x) - H(x) = 4$ pour tout x, en particulier

$$\boxed{K(2) - H(2) = 4}.$$

Exercice 2 (40 min)

10 points

Affirmation 1. **VRAIE.** f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f'(x) = 3 \times (-2)\,\mathrm{e}^{-2x} = -6\,\mathrm{e}^{-2x}$. Or $-2f(x) = -2 \times 3\,\mathrm{e}^{-2x} = -6\,\mathrm{e}^{-2x}$. Ainsi $f'(x) = -2f(x)$ pour tout x : $\boxed{f \text{ est solution de } y' = -2y}$.

Affirmation 2. **FAUSSE.** Les solutions de $y' = 5y$ sont les fonctions $x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{5x}$ ($C \in \mathbb{R}$) : la constante *multiplie* l'exponentielle, elle ne s'y ajoute pas.
Contre-exemple : avec $C = 1$, la fonction $g(x) = \mathrm{e}^{5x} + 1$ vérifie $g'(x) = 5\,\mathrm{e}^{5x}$ alors que $5g(x) = 5\,\mathrm{e}^{5x} + 5$. Comme $5\,\mathrm{e}^{5x} \neq 5\,\mathrm{e}^{5x} + 5$, g n'est pas solution : $\boxed{\text{l'affirmation est fausse}}$.

Affirmation 3. **VRAIE.** Solution constante de $y' = 2y - 6$: $0 = 2y - 6 \iff y = 3$. Les solutions de $y' = 2y$ étant $x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{2x}$, les solutions de $y' = 2y - 6$ sont les fonctions

$x \longmapsto 3 + C\,\mathrm{e}^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$.
La condition $y(0) = 4$ donne $3 + C = 4$, soit $C = 1$: l'unique solution cherchée est bien $x \longmapsto 3 + \mathrm{e}^{2x}$.
Vérification directe : si $h(x) = 3 + \mathrm{e}^{2x}$, alors $h'(x) = 2\,\mathrm{e}^{2x}$ et $2h(x) - 6 = 2\,\mathrm{e}^{2x}$; de plus $h(0) = 4$. L'affirmation est vraie.

Affirmation 4. **FAUSSE.** Solution constante : $-0{,}5\,y + 1 = 0 \iff y = 2$. Les solutions sont les fonctions $x \longmapsto 2 + C\,\mathrm{e}^{-0{,}5x}$, $C \in \mathbb{R}$.
Contre-exemple : pour $C = 3$, $k(x) = 2 + 3\,\mathrm{e}^{-0{,}5x}$ est solution (c'est la solution qui vérifie $k(0) = 5$) et $k'(x) = -1{,}5\,\mathrm{e}^{-0{,}5x} < 0$ pour tout réel x : k est strictement *décroissante* sur $\mathbb{R}$. L'affirmation est fausse.
(Seules les solutions avec $C < 0$ sont croissantes ; la solution constante $y = 2$ n'est pas croissante au sens strict non plus.)

Affirmation 5. **VRAIE.** F et G sont deux primitives de la même fonction sur l'intervalle $\mathbb{R}$: elles diffèrent d'une constante, c'est-à-dire qu'il existe un réel C tel que $G(x) = F(x) + C$ pour tout réel x.
En $x = 0$: $G(0) = F(0) + C$, et comme $F(0) = G(0)$, on obtient $C = 0$. Donc $G(x) = F(x)$ pour tout réel x : l'affirmation est vraie.
(C'est l'unicité de la primitive qui prend une valeur donnée en un point.)

Exercice 3 (30 min)

5,5 points

1) Une fonction constante $y = c$ a pour dérivée 0 ; elle est solution de (E) si et seulement si $0 = 10 - 2c$, soit $c = 5$. La solution constante est $y = 5$.
Si le parachutiste avait exactement la vitesse 5 m/s, celle-ci ne changerait plus : 5 m/s est la **vitesse limite** (le poids et la résistance de l'air se compensent).

2) (E) s'écrit $y' = -2y + 10$. Les solutions de l'équation $y' = -2y$ sont les fonctions $t \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-2t}$, $C \in \mathbb{R}$. En ajoutant la solution constante 5, les solutions de (E) sur $[0\,;+\infty[$ sont les fonctions

$$t \longmapsto 5 + C\,\mathrm{e}^{-2t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Vérification : si $y(t) = 5 + C\,\mathrm{e}^{-2t}$, alors $y'(t) = -2C\,\mathrm{e}^{-2t}$ et $10 - 2y(t) = 10 - 10 - 2C\,\mathrm{e}^{-2t} = -2C\,\mathrm{e}^{-2t}$.

3) v est une solution de (E) : $v(t) = 5 + C\,\mathrm{e}^{-2t}$ pour un certain réel C. Or $v(0) = 50$, donc $5 + C = 50$, soit $C = 45$. Ainsi

$$v(t) = 5 + 45\,\mathrm{e}^{-2t} \quad \text{pour tout } t \geqslant 0.$$

4) Pour tout $t \geqslant 0$, $v'(t) = 45 \times (-2)\,\mathrm{e}^{-2t} = -90\,\mathrm{e}^{-2t} < 0$: v est **strictement décroissante** sur $[0\,;+\infty[$.
Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-2t} = 0$, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = 5$.
Interprétation : dès l'ouverture du parachute, le parachutiste ralentit, et sa vitesse se rapproche de la vitesse limite de 5 m/s sans jamais passer en dessous.

5) On résout $v(t) = 10$:

$$5 + 45\,\mathrm{e}^{-2t} = 10 \iff \mathrm{e}^{-2t} = \frac{5}{45} = \frac{1}{9} \iff -2t = \ln\frac{1}{9} = -\ln 9 = -2\ln 3 \iff t = \ln 3.$$

Donc $\boxed{t_1 = \ln 3 \approx 1{,}1 \text{ s}}$: à peine plus d'une seconde après l'ouverture, la vitesse est déjà passée de 50 à 10 m/s.

6) $v(2) = 5 + 45\,\mathrm{e}^{-4} \approx 5 + 45 \times 0{,}018 = 5 + 0{,}81$, soit $\boxed{v(2) \approx 5{,}8 \text{ m/s}}$.
Au bout de 90 s, e^{-180} est négligeable : la vitesse vaut pratiquement la vitesse limite, 5 m/s. Or 5 m/s $= 5 \times 3{,}6$ km/h, donc le parachutiste atterrit à environ $\boxed{18 \text{ km/h}}$, la vitesse d'un cycliste tranquille.