Calculatrice interdite
Durée conseillée indiquée pour chaque exercice.

Données utiles : $\ln 3 \approx 1{,}10$ $\quad \mathrm{e}^{-4} \approx 0{,}018$

Exercice 1 (20 min)

4,5 points

1) Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I indiqué.

a. $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ sur $I = \mathbb{R}$.

b. $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$ sur $I = \mathbb{R}$.

c. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ sur $I =]0\,;+\infty[$.

d. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ sur $I = \mathbb{R}$.

e. $f(x) = (2x+1)\,\mathrm{e}^{x^2+x}$ sur $I = \mathbb{R}$.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 3$.

a. Déterminer la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(1) = 2$.

b. Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = x^2 - 3x + 1$. Justifier que G est aussi une primitive de f sur $\mathbb{R}$, puis calculer $F(x) - G(x)$. Que retrouve-t-on ?

3) Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$, et H et K deux primitives de g sur $\mathbb{R}$ telles que $H(0) = 1$ et $K(0) = 5$. Calculer $K(2) - H(2)$. Justifier.

Exercice 2 (40 min)

10 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est **vraie** ou **fausse** et **justifier** : une affirmation vraie se démontre, une affirmation fausse se réfute (par un contre-exemple ou par un calcul). Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Affirmation 1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\,\mathrm{e}^{-2x}$ est solution de l'équation différentielle $y' = -2y$.

Affirmation 2. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 5y$ sont exactement les fonctions $x \longmapsto \mathrm{e}^{5x} + C$, où C est un réel quelconque.

Affirmation 3. La solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 2y - 6$ qui vérifie $y(0) = 4$ est la fonction $x \longmapsto 3 + \mathrm{e}^{2x}$.

Affirmation 4. Toute solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = -0{,}5\,y + 1$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.

Affirmation 5. Si F et G sont deux primitives d'une même fonction continue sur $\mathbb{R}$ et si $F(0) = G(0)$, alors $F(x) = G(x)$ pour tout réel x.

Exercice 3 (30 min)

5,5 points

Un parachutiste saute d'un avion. Après quelques secondes de chute libre, il ouvre son parachute : on choisit cet instant comme origine des temps ($t = 0$), et sa vitesse vaut alors 50 m/s. Pour $t \geqslant 0$ (en secondes), on note $v(t)$ la vitesse du parachutiste, en m/s.

Parachute ouvert, le parachutiste est soumis à son poids et à la résistance de l'air, que l'on modélise par une force proportionnelle à la vitesse. On admet que la fonction v est solution, sur $[0\,;+\infty[$, de l'équation différentielle

$$(E) : \quad y' = 10 - 2y.$$

1) Déterminer la solution constante de (E). Que représente-t-elle pour le parachutiste ?

2) Résoudre l'équation différentielle (E) sur $[0\,;+\infty[$.

3) Montrer que, pour tout $t \geqslant 0$, $v(t) = 5 + 45\,\mathrm{e}^{-2t}$.

4) Étudier le sens de variation de v sur $[0\,;+\infty[$ et déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t)$. Interpréter.

5) Déterminer la valeur exacte de l'instant t_1 auquel la vitesse du parachutiste vaut 10 m/s, puis une valeur approchée au dixième de seconde.

6) Donner une valeur approchée de $v(2)$ au dixième. Le parachutiste touche le sol 90 secondes après l'ouverture : à quelle vitesse, en km/h, atterrit-il ?