Exercice 1

6 points

1) $W(0) = \dfrac{10}{1} = \boxed{10}$; $W(0{,}5) = \dfrac{10}{0{,}5} = \boxed{20}$; $W(0{,}9) = \dfrac{10}{0{,}1} = \boxed{100}$.

Lorsque aucun box n'est occupé, un patient attend en moyenne 10 minutes (temps incompressible d'accueil et d'orientation). Quand la moitié des boxes sont occupés, l'attente moyenne double : 20 minutes. Quand $90\,\%$ des boxes sont occupés, elle atteint 100 minutes, soit 1 h 40 : le service est saturé.

2) $W = 10 \times \dfrac{1}{u}$ avec $u(x) = 1 - x$ et $u'(x) = -1$. Comme $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$:

$$W'(x) = 10 \times \frac{-(-1)}{(1-x)^2} = \boxed{\frac{10}{(1-x)^2}}.$$

Pour $x \in [0\,;0{,}9]$, $(1-x)^2 > 0$, donc $W'(x) > 0$: $\boxed{W \text{ est strictement croissante sur } [0\,;0{,}9]}$. Plus le service est occupé, plus on attend.

3) $W' = 10 \times \dfrac{1}{v}$ avec $v(x) = (1-x)^2$ et $v'(x) = -2(1-x)$ (dérivée de u^2 avec $u' = -1$). Donc

$$W''(x) = 10 \times \frac{-v'(x)}{v(x)^2} = 10 \times \frac{2(1-x)}{(1-x)^4} = \boxed{\frac{20}{(1-x)^3}}.$$

Pour $x \in [0\,;0{,}9]$, $1 - x > 0$ donc $(1-x)^3 > 0$ et $W''(x) > 0$: $\boxed{W \text{ est convexe sur } [0\,;0{,}9]}$.

4) **a.** T a pour équation $y = W'(0)(x - 0) + W(0)$ avec $W'(0) = 10$ et $W(0) = 10$: $\boxed{T : y = 10x + 10}$.

b. Pour $x \in [0\,;0{,}9]$, en réduisant au même dénominateur $1 - x \neq 0$:

$$W(x) - (10 + 10x) = \frac{10 - (10 + 10x)(1-x)}{1-x} = \frac{10 - \left(10 - 10x + 10x - 10x^2\right)}{1-x} = \boxed{\frac{10x^2}{1-x}}.$$

Comme $x^2 \geqslant 0$ et $1 - x > 0$, cette différence est positive ou nulle (nulle seulement en $x = 0$) : la courbe de W est $\boxed{\text{au-dessus de sa tangente } T}$ sur $[0\,;0{,}9]$, et la touche au point d'abscisse 0.

C'était prévisible : W est convexe sur $[0\,;0{,}9]$, et la courbe d'une fonction convexe est située au-dessus de chacune de ses tangentes.

5) De $0{,}5$ à $0{,}6$: $W(0{,}6) - W(0{,}5) = \dfrac{10}{0{,}4} - 20 = 25 - 20 = \boxed{5 \text{ min}}$.

De $0{,}8$ à $0{,}9$: $W(0{,}9) - W(0{,}8) = 100 - \dfrac{10}{0{,}2} = 100 - 50 = \boxed{50 \text{ min}}$.

Le même gain de 10 points d'occupation coûte 5 minutes d'attente supplémentaires autour de $50\,\%$, mais 50 minutes autour de $80\,\%$. C'est la traduction de la convexité : W' est croissante, donc la pente de la courbe augmente avec x ; chaque point d'occupation supplémentaire allonge l'attente davantage que le précédent. Un service déjà très occupé devient rapidement ingérable.

Exercice 2

7 points

Partie A — Lecture de la courbe de la vitesse de croissance

1) Le sommet de la courbe de h' se situe vers $t \approx \boxed{30}$ jours (entre 25 et 35) ; la vitesse de croissance maximale vaut environ $\boxed{6 \text{ à } 6{,}5 \text{ cm par jour}}$.

2) D'après la courbe, h' est croissante sur $[0\,;30]$ environ et décroissante ensuite :

t	0		≈ 30		84
h'	≈ 1	↗	$\approx 6{,}2$	↘	$\approx 0{,}1$

Une fonction est convexe sur un intervalle où sa dérivée est croissante, concave là où sa dérivée est décroissante. Donc h est $\boxed{\text{convexe sur } [0\,;30]}$ et $\boxed{\text{concave sur } [30\,;84]}$ (valeurs approchées). La convexité change en $t \approx 30$: le point de la courbe de h d'abscisse ≈ 30 est un $\boxed{\text{point d'inflexion}}$.

3) Pendant le premier mois, la croissance du tournesol **s'accélère** (la vitesse augmente jusqu'à plus de 6 cm par jour vers le 30e jour) ; ensuite la croissance **ralentit** de plus en plus et la hauteur se stabilise.

Partie B — Par le calcul

4) $h(0) = \dfrac{250}{1+24} = \boxed{10}$: au début des mesures, la plante mesure 10 cm.
Pour $t \in [0\,;84]$:

$$h(t) = 125 \iff \frac{250}{1+24\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}} = 125 \iff 1+24\,\mathrm{e}^{-0{,}1t} = \frac{250}{125} = 2$$

$$\iff 24\,\mathrm{e}^{-0{,}1t} = 1 \iff \boxed{\mathrm{e}^{-0{,}1t} = \frac{1}{24}}.$$

En appliquant la fonction $\ln$: $-0{,}1t = \ln\dfrac{1}{24} = -\ln 24$, d'où $\boxed{t = 10\ln 24 \approx 31{,}8}$ jours. La plante atteint 125 cm (la moitié de la hauteur limite 250 cm) au bout de $31{,}8$ jours environ.

5) Pour $t \in [0\,;84]$, $60\,\mathrm{e}^{-0{,}1t} > 0$ et $\left(1+24\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}\right)^3 > 0$: $h''(t)$ est du signe de $24\,\mathrm{e}^{-0{,}1t} - 1$. Or

$$24\,\mathrm{e}^{-0{,}1t} - 1 > 0 \iff \mathrm{e}^{-0{,}1t} > \frac{1}{24} \iff -0{,}1t > -\ln 24 \iff t < 10\ln 24,$$

la fonction $\ln$ étant strictement croissante. Donc $h''(t) > 0$ sur $[0\,;10\ln 24[$, $h''(10\ln 24) = 0$ et $h''(t) < 0$ sur $]10\ln 24\,;84]$: h est $\boxed{\text{convexe sur } [0\,;10\ln 24]}$ et $\boxed{\text{concave sur } [10\ln 24\,;84]}$, et la courbe de h admet un point d'inflexion d'abscisse $10\ln 24 \approx 31{,}8$, ce qui confirme la lecture graphique ($t \approx 30$).

6) La vitesse h' est maximale au point d'inflexion, c'est-à-dire pour $t_0 = 10\ln 24$ (là où h'' s'annule

en changeant de signe : h' croît puis décroît). En t_0, $\mathrm{e}^{-0{,}1t_0} = \dfrac{1}{24}$, donc

$$h'(t_0) = \frac{600 \times \frac{1}{24}}{\left(1 + 24 \times \frac{1}{24}\right)^2} = \frac{25}{2^2} = \frac{25}{4} = \boxed{6{,}25 \text{ cm par jour}}.$$

À cet instant, d'après la question 4, la hauteur du tournesol est $h(t_0) = \boxed{125 \text{ cm}}$: la croissance est la plus rapide quand la plante atteint la moitié de sa hauteur finale.

Exercice 3

7 points

1) a. $f'(x) = 4x^3 - 12x + 8$ et $f''(x) = 12x^2 - 12 = 12\left(x^2 - 1\right) = \boxed{12(x-1)(x+1)}$ (identité remarquable).

b. $f''(x)$ est du signe du trinôme $x^2 - 1$, de racines -1 et 1 : positif à l'extérieur des racines, négatif entre elles.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc f est $\boxed{\text{convexe sur }]-\infty\,;-1]}$ et sur $[1\,;+\infty[$, et $\boxed{\text{concave sur } [-1\,;1]}$.
f'' s'annule en changeant de signe en -1 et en 1 : deux points d'inflexion. $f(-1) = 1-6-8 = -13$ et $f(1) = 1 - 6 + 8 = 3$: les points d'inflexion sont $\boxed{(-1\,;\,-13)}$ et $\boxed{(1\,;\,3)}$.

2) a. $g = \mathrm{e}^u$ avec $u(x) = -x^2$ et $u'(x) = -2x$, donc $\boxed{g'(x) = -2x\,\mathrm{e}^{-x^2}}$.
g' est un produit : $g''(x) = -2\,\mathrm{e}^{-x^2} + (-2x) \times \left(-2x\,\mathrm{e}^{-x^2}\right) = -2\,\mathrm{e}^{-x^2} + 4x^2\,\mathrm{e}^{-x^2} = \boxed{\left(4x^2 - 2\right)\mathrm{e}^{-x^2}}$.

b. Comme $\mathrm{e}^{-x^2} > 0$, $g''(x)$ est du signe de $4x^2 - 2$, trinôme de racines $x = \pm\sqrt{\dfrac{2}{4}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, positif à l'extérieur des racines. Donc g est $\boxed{\text{convexe sur } \left]-\infty\,;-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right]}$ et sur $\left[\tfrac{\sqrt{2}}{2}\,;+\infty\right[$, et $\boxed{\text{concave sur } \left[-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\,;\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right]}$.
g'' change de signe en $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$: deux points d'inflexion, d'ordonnée $g\left(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ (car $\left(\pm\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \tfrac{2}{4} = \tfrac{1}{2}$). Les points d'inflexion sont

$$\boxed{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right) \approx (-0{,}71\,;\,0{,}61)} \quad \text{et} \quad \boxed{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right) \approx (0{,}71\,;\,0{,}61)}.$$

Remarque : la courbe de g est une « cloche » symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, de sommet $(0\,;1)$; les deux points d'inflexion sont symétriques.

Bonus

hors barème

1) Par définition, une fonction est convexe sur un intervalle lorsque, pour tous points M et N de sa courbe, le segment $[MN]$ (une **sécante**) est situé **au-dessus** de la courbe entre M et N.
Prenons $M = (0\,;\,W(0)) = (0\,;10)$ et $N = (0{,}9\,;\,W(0{,}9)) = (0{,}9\,;100)$. La sécante (MN) a pour coefficient directeur $\dfrac{100-10}{0{,}9-0} = \dfrac{90}{0{,}9} = 100$ et pour ordonnée à l'origine 10 : c'est la droite d'équation $y = 10 + 100x$. Par convexité de W, pour tout $x \in [0\,;0{,}9]$, le point de la courbe d'abscisse x est au-dessous (ou sur) le point de la sécante de même abscisse : $\boxed{W(x) \leqslant 10 + 100x}$.

2) Pour $x \in [0\,;0{,}9]$:

$$10 + 100x - W(x) = \frac{(10+100x)(1-x) - 10}{1-x} = \frac{10 - 10x + 100x - 100x^2 - 10}{1-x}$$

$$= \frac{90x - 100x^2}{1-x} = \boxed{\frac{10x(9-10x)}{1-x}}.$$

Sur $[0\,;0{,}9]$: $x \geqslant 0$, $9 - 10x \geqslant 0$ et $1 - x > 0$, donc cette différence est positive ou nulle : on retrouve $W(x) \leqslant 10 + 100x$, avec égalité seulement en $x = 0$ et en $x = 0{,}9$.

3) D'après la question **4** de l'exercice 1 et ce qui précède, pour tout $x \in [0\,;0{,}9]$:

$$\boxed{10 + 10x \leqslant W(x) \leqslant 10 + 100x}.$$

La courbe de W est donc comprise entre sa tangente T (d'équation $y = 10 + 10x$) et la sécante d'équation $y = 10 + 100x$: au-dessus de sa tangente, au-dessous de sa corde, comme toute courbe de fonction convexe.