Calculatrice autorisée (mode examen)

Toutes les réponses doivent être justifiées, sauf mention contraire.

Exercice 1

6 points

Dans un service d'urgences, on appelle **taux d'occupation** la proportion x des boxes de soins occupés à un instant donné ($0 \leqslant x < 1$). Un modèle simple de file d'attente estime le temps d'attente moyen des patients avant leur prise en charge, en minutes, par

$$W(x) = \frac{10}{1-x}, \qquad x \in [0\,;0{,}9].$$

1) Calculer $W(0)$, $W(0{,}5)$ et $W(0{,}9)$. Interpréter ces trois résultats dans le contexte.

2) Montrer que, pour tout $x \in [0\,;0{,}9]$, $W'(x) = \dfrac{10}{(1-x)^2}$. En déduire le sens de variation de W sur $[0\,;0{,}9]$.

3) Montrer que, pour tout $x \in [0\,;0{,}9]$, $W''(x) = \dfrac{20}{(1-x)^3}$. En déduire que W est convexe sur $[0\,;0{,}9]$.

4) **a.** Déterminer une équation de la tangente T à la courbe de W au point d'abscisse 0.

b. Montrer que, pour tout $x \in [0\,;0{,}9]$, $W(x) - (10 + 10x) = \dfrac{10x^2}{1-x}$. En déduire la position de la courbe de W par rapport à T. Ce résultat était-il prévisible ?

5) Calculer l'augmentation du temps d'attente moyen lorsque le taux d'occupation passe de $0{,}5$ à $0{,}6$, puis lorsqu'il passe de $0{,}8$ à $0{,}9$. Expliquer, à l'aide de la convexité de W, pourquoi « chaque point d'occupation supplémentaire coûte de plus en plus d'attente ».

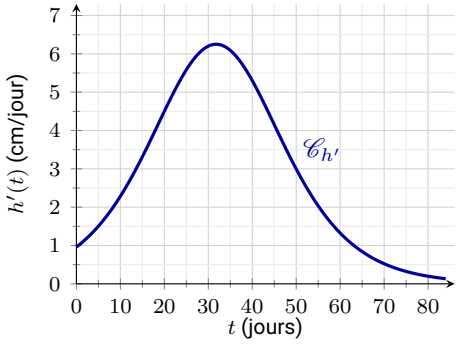
Exercice 2

7 points

On étudie la croissance d'un tournesol à partir de mesures de hauteur publiées par H. S. Reed et R. H. Holland (1919). On modélise la hauteur de la plante, en centimètres, t jours après le début des mesures ($0 \leqslant t \leqslant 84$), par $h(t) = \dfrac{250}{1 + 24\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}}$. La fonction h est deux fois dérivable sur $[0\,;84]$; sa dérivée h' est la **vitesse de croissance** de la plante, en centimètres par jour.

Partie A — Lecture de la courbe de la vitesse de croissance

La courbe ci-contre est celle de la fonction h' (et non celle de h).



1) Lire une valeur approchée de la vitesse de croissance maximale (à $0{,}5$ cm/jour près) et du jour où elle est atteinte (à 5 jours près).

2) Dresser le tableau de variations de h' sur $[0\,;84]$. En déduire les intervalles sur lesquels h est convexe, puis concave. Que représente, pour la courbe de h, le point d'abscisse trouvée à la question 1 ?

3) Décrire en une phrase la croissance du tournesol au cours des 84 jours.

Partie B — Par le calcul

4) Calculer $h(0)$ et interpréter. Montrer que l'équation $h(t) = 125$ équivaut à $\mathrm{e}^{-0{,}1t} = \dfrac{1}{24}$, puis la résoudre (valeur exacte, puis arrondie au dixième).

5) On admet que, pour tout $t \in [0\,;84]$,

$$h'(t) = \frac{600\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}}{(1+24\,\mathrm{e}^{-0{,}1t})^2} \qquad \text{et} \qquad h''(t) = \frac{60\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}\left(24\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}-1\right)}{(1+24\,\mathrm{e}^{-0{,}1t})^3}.$$

Étudier le signe de $h''(t)$ sur $[0\,;84]$ et retrouver les résultats de la question 2 (convexité de h, point d'inflexion).

6) Vérifier par le calcul que la vitesse de croissance maximale vaut exactement $6{,}25$ cm par jour. Quelle est la hauteur du tournesol à cet instant ?

Exercice 3

7 points

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x$.

- **a.** Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$, et montrer que $f''(x) = 12(x-1)(x+1)$.
- **b.** Étudier le signe de $f''(x)$ sur $\mathbb{R}$; en déduire les intervalles sur lesquels f est convexe, puis concave, et les coordonnées des points d'inflexion de la courbe de f.

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

- **a.** Calculer $g'(x)$, puis montrer que $g''(x) = (4x^2 - 2)\,\mathrm{e}^{-x^2}$.
- **b.** Étudier la convexité de g sur $\mathbb{R}$ et donner les coordonnées des points d'inflexion de sa courbe (valeurs exactes, puis arrondies au centième).

Bonus

hors barème

La fonction W de l'exercice 1 est convexe sur $[0\,;0{,}9]$.

1) En utilisant la définition de la convexité par les sécantes, démontrer que, pour tout $x \in [0\,;0{,}9]$, $W(x) \leqslant 10 + 100x$.

2) Retrouver ce résultat par le calcul, en montrant que $10 + 100x - W(x) = \dfrac{10x(9-10x)}{1-x}$.

3) Entre quelles deux droites la courbe de W est-elle ainsi encadrée sur $[0\,;0{,}9]$?