Exercice 1 — Dérivée seconde et convexité

3 points

1) f est une fonction polynôme, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ et $\boxed{f''(x) = 6x - 12 = 6(x-2)}$.
$f''(x) < 0$ pour $x < 2$ et $f''(x) > 0$ pour $x > 2$: f est **concave sur** $]-\infty\,;2]$ et **convexe sur** $[2\,;+\infty[$. Comme f'' s'annule en 2 en changeant de signe, la courbe admet un point d'inflexion d'abscisse 2 ; $f(2) = 8 - 24 + 18 + 1 = 3$: le point d'inflexion est $\boxed{(2\,;\,3)}$.

2) g est un produit : $g'(x) = 1 \times \mathrm{e}^x + (x+1)\mathrm{e}^x = (x+2)\mathrm{e}^x$, puis $g''(x) = \mathrm{e}^x + (x+2)\mathrm{e}^x = \boxed{(x+3)\mathrm{e}^x}$.
Comme $\mathrm{e}^x > 0$, $g''(x)$ est du signe de $x + 3$: $g''(x) \geqslant 0 \iff x \geqslant -3$. Donc g est $\boxed{\text{convexe sur } [-3\,;+\infty[}$ (et concave sur $]-\infty\,;-3]$).
g'' s'annule en -3 en changeant de signe : point d'inflexion d'abscisse -3, d'ordonnée $g(-3) = (-3+1)\mathrm{e}^{-3} = -2\mathrm{e}^{-3}$. Le point d'inflexion est $\boxed{\left(-3\,;\,-2\mathrm{e}^{-3}\right)}$.

Exercice 2 — Vitesse d'une réaction enzymatique

4 points

1) $v(0) = \dfrac{0}{2} = \boxed{0}$; $v(2) = \dfrac{20}{4} = \boxed{5}$; $v(8) = \dfrac{80}{10} = \boxed{8}$ (en micromoles par minute).

2) $v = \dfrac{u}{w}$ avec $u(s) = 10s$, $u'(s) = 10$, $w(s) = 2 + s$, $w'(s) = 1$. Pour $s \geqslant 0$, $w(s) \neq 0$ et

$$v'(s) = \frac{u'w - uw'}{w^2} = \frac{10(2+s) - 10s \times 1}{(2+s)^2} = \frac{20 + 10s - 10s}{(2+s)^2} = \boxed{\frac{20}{(2+s)^2}}.$$

Un carré étant positif, $v'(s) > 0$ pour tout $s \geqslant 0$: $\boxed{v \text{ est strictement croissante sur } [0\,;+\infty[}$ (plus il y a de substrat, plus la réaction est rapide).

3) Pour $s \geqslant 0$, $(2+s)^3 > 0$ donc $v''(s) = \dfrac{-40}{(2+s)^3} < 0$: $\boxed{v \text{ est concave sur } [0\,;+\infty[}$.
Interprétation : v est croissante mais sa dérivée v' (la « sensibilité » de la vitesse à la concentration) est décroissante : une même augmentation de la concentration apporte un gain de vitesse **de plus en plus faible** à mesure que s augmente. Par exemple, passer de 0 à 2 mmol/L fait gagner 5 unités de vitesse, alors que passer de 2 à 8 mmol/L n'en fait gagner que 3.

4) **a.** $T : y = v'(0)(s-0) + v(0)$ avec $v(0) = 0$ et $v'(0) = \dfrac{20}{4} = 5$. Donc $\boxed{T : y = 5s}$.

b. Pour $s \geqslant 0$: $v(s) - 5s = \dfrac{10s}{2+s} - \dfrac{5s(2+s)}{2+s} = \dfrac{10s - 10s - 5s^2}{2+s} = \boxed{\dfrac{-5s^2}{2+s}}$.
Comme $s^2 \geqslant 0$ et $2 + s > 0$, on a $v(s) - 5s \leqslant 0$, avec égalité seulement pour $s = 0$: $\boxed{\mathscr{C} \text{ est au-dessous de } T}$ sur $[0\,;+\infty[$.
C'était prévisible : v est concave sur $[0\,;+\infty[$, et la courbe d'une fonction concave est située **au-dessous de chacune de ses tangentes**. Dans le contexte, la droite $y = 5s$ (vitesse proportionnelle à la concentration, valable pour les faibles concentrations) **surestime** toujours la vitesse réelle.

c. Pour $s \geqslant 0$: $v(s) = 10 \iff 10s = 10(2+s) \iff 10s = 20 + 10s \iff 0 =$

20, ce qui est impossible. De plus $v(s) < 10 \iff 10s < 20 + 10s$, toujours vrai. Donc $\boxed{\text{la vitesse n'atteint jamais } 10}$: elle s'en rapproche quand s devient grand (c'est la **vitesse maximale** de l'enzyme, qui finit par être saturée par le substrat).

Exercice 3 — Engrais et rendement d'une parcelle de blé

5 points

Partie A — Le rendement

1) $P(0) = \boxed{40}$: sans engrais azoté, la parcelle produit 40 quintaux de blé par hectare.

2) P est une fonction polynôme : $P'(x) = -3x^2 + 6x + 9$. Développons $-3(x-3)(x+1) = -3\left(x^2 + x - 3x - 3\right) = -3\left(x^2 - 2x - 3\right) = -3x^2 + 6x + 9$. Donc $\boxed{P'(x) = -3(x-3)(x+1)}$.
Sur $[0\,;4]$: $x + 1 > 0$ et $-3 < 0$, donc $P'(x)$ est du signe de $-(x-3) = 3 - x$: positif sur $[0\,;3[$, nul en 3, négatif sur $]3\,;4]$.
$P(0) = 40$; $P(3) = -27 + 27 + 27 + 40 = 67$; $P(4) = -64 + 48 + 36 + 40 = 60$.

x	0		3		4
$P'(x)$		$+$	0	$-$	
P	40	↗	67	↘	60

3) Le rendement est maximal pour $x = 3$, soit une dose de $\boxed{300 \text{ kg d'azote par hectare}}$, et il vaut alors $\boxed{67 \text{ quintaux par hectare}}$. Au-delà, l'excès d'engrais fait baisser le rendement.

Partie B — Le rendement marginal

4) $\boxed{P''(x) = -6x + 6 = 6(1-x)}$. $P''(x) > 0$ pour $x < 1$ et $P''(x) < 0$ pour $x > 1$: P est **convexe sur** $[0\,;1]$ et **concave sur** $[1\,;4]$. P'' s'annule en 1 en changeant de signe : la courbe admet un point d'inflexion d'abscisse 1, d'ordonnée $P(1) = -1 + 3 + 9 + 40 = 51$: $\boxed{(1\,;\,51)}$.

5) Le rendement marginal est P', dont la dérivée est P''. D'après la question 4, P' est croissante sur $[0\,;1]$ (car $P'' \geqslant 0$) et décroissante sur $[1\,;4]$: P' est donc **maximal pour** $x = 1$, c'est-à-dire pour une dose de $\boxed{100 \text{ kg d'azote par hectare}}$, et ce maximum vaut $P'(1) = -3 + 6 + 9 = \boxed{12}$ quintaux par hectare (pour cent kilogrammes supplémentaires).
Interprétation : de 0 à 100 kg/ha, chaque apport d'engrais est **de plus en plus efficace** (le rendement marginal passe de $P'(0) = 9$ à 12) ; de 100 à 300 kg/ha, le rendement augmente encore mais chaque apport supplémentaire rapporte **de moins en moins** (rendements décroissants : le rendement marginal retombe de 12 à $P'(3) = 0$). Le point d'inflexion marque le passage de l'un à l'autre.

Exercice 4 — Une courbe et ses tangentes

7 points

Partie A — Lectures graphiques

1) $\boxed{f(0)=3}$, $\boxed{f(2)=1}$ et $\boxed{f(3)=3}$ (ordonnées des points de $\mathscr{C}$ d'abscisses 0, 2 et 3).

2) $f'(1)$ est le coefficient directeur de T_A : la droite passe par $A(1\,;2)$ et par le point $(3\,;-1)$, donc $f'(1)=\dfrac{-1-2}{3-1}=\boxed{-1{,}5}$.
$f'(3)$ est le coefficient directeur de T_B : la droite passe par $B(3\,;3)$ et par le point $(2\,;-1{,}5)$, donc $f'(3)=\dfrac{3-(-1{,}5)}{3-2}=\boxed{4{,}5}$.

3) La courbe semble **concave sur** $[-1{,}5\,;1]$ (elle est sous ses tangentes, « bombée vers le haut ») et **convexe sur** $[1\,;3{,}5]$ (au-dessus de ses tangentes). Le point A, où la convexité change et où la courbe traverse sa tangente T_A, semble être un $\boxed{\text{point d'inflexion}}$.

4) Sur tout $[-1{,}5\,;3{,}5]$, $\mathscr{C}$ semble **au-dessus de** T_B (elle ne la touche qu'en B). En revanche, $\mathscr{C}$ **traverse** T_A en A : elle est au-dessous de T_A pour $x<1$ et au-dessus pour $x>1$.

Partie B — Par le calcul

5) $f'(x)=1{,}5x^2-3x$ et $\boxed{f''(x)=3x-3=3(x-1)}$.
$f''(x)<0$ pour $x<1$ et $f''(x)>0$ pour $x>1$: f est **concave sur** $[-1{,}5\,;1]$ et **convexe sur** $[1\,;3{,}5]$, et A (abscisse 1, où f'' s'annule en changeant de signe) est bien un point d'inflexion. Les conjectures de la question 3 sont confirmées.

6) **a.** $T_A : y=f'(1)(x-1)+f(1)$ avec $f(1)=0{,}5-1{,}5+3=2$ et $f'(1)=1{,}5-3=-1{,}5$. Donc $y=-1{,}5(x-1)+2$, soit $\boxed{T_A : y=-1{,}5x+3{,}5}$.

b. Développons $0{,}5(x-1)^3=0{,}5\left(x^3-3x^2+3x-1\right)=0{,}5x^3-1{,}5x^2+1{,}5x-0{,}5$.
Or $f(x)-(-1{,}5x+3{,}5)=0{,}5x^3-1{,}5x^2+3+1{,}5x-3{,}5=0{,}5x^3-1{,}5x^2+1{,}5x-0{,}5$. D'où $\boxed{f(x)-(-1{,}5x+3{,}5)=0{,}5(x-1)^3}$.
Cette différence est du signe de $(x-1)^3$, c'est-à-dire de $x-1$: négative pour $x<1$, nulle en 1, positive pour $x>1$. Donc $\mathscr{C}$ est **au-dessous de** T_A **sur** $[-1{,}5\,;1]$, **au-dessus sur** $[1\,;3{,}5]$: la courbe $\boxed{\text{traverse sa tangente en } A}$, ce qui confirme que A est un point d'inflexion.

7) $f(x)-(4{,}5x-10{,}5)=0{,}5(x-3)^2(x+3)$. Sur $[-1{,}5\,;3{,}5]$: $(x-3)^2\geqslant 0$ et $x+3\geqslant 1{,}5>0$, donc cette différence est positive ou nulle, nulle seulement en $x=3$. Ainsi $\boxed{\mathscr{C} \text{ est au-dessus de } T_B \text{ sur } [-1{,}5\,;3{,}5]}$, et la touche uniquement en B, en accord avec la conjecture de la question 4.
La convexité de f sur $[1\,;3{,}5]$ permettait de prévoir ce résultat **sur** $[1\,;3{,}5]$ **seulement** : sur un intervalle où une fonction est convexe, sa courbe est au-dessus de ses tangentes. Sur $[-1{,}5\,;1]$, où f est concave, rien ne le garantissait a priori ; c'est le calcul qui l'établit.

Exercice 5 — Question ouverte

1 point

Second degré : jamais. Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. Alors $f'(x) = 2ax + b$ et $f''(x) = 2a$: la dérivée seconde est une **constante non nulle**, elle ne s'annule jamais et ne change pas de signe. La parabole est convexe sur $\mathbb{R}$ (si $a > 0$) ou concave sur $\mathbb{R}$ (si $a < 0$) : aucun point d'inflexion.

Troisième degré : toujours. Soit $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec $a \neq 0$. Alors $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ et $f''(x) = 6ax + 2b$: la dérivée seconde est une fonction affine de coefficient directeur $6a \neq 0$. Elle s'annule en $x_0 = -\dfrac{2b}{6a} = -\dfrac{b}{3a}$ et **change de signe** en ce point (une fonction affine non constante change de signe en sa racine). La courbe admet donc exactement un point d'inflexion, d'abscisse $-\dfrac{b}{3a}$.

Vérification sur les exemples du sujet : $x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ (exercice 1) : $-\dfrac{-6}{3} = 2$; $0{,}5x^3 - 1{,}5x^2 + 3$ (exercice 4) : $-\dfrac{-1{,}5}{1{,}5} = 1$.