Calculatrice interdite

Toutes les réponses doivent être justifiées, sauf mention contraire.

Exercice 1 — Dérivée seconde et convexité

3 points

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$. Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$ et donner les coordonnées du point d'inflexion de sa courbe.

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x+1)\mathrm{e}^x$. Montrer que, pour tout réel x, $g''(x) = (x+3)\mathrm{e}^x$. En déduire l'intervalle sur lequel g est convexe, puis les coordonnées exactes du point d'inflexion de sa courbe.

Exercice 2 — Vitesse d'une réaction enzymatique

4 points

En biochimie, la vitesse d'une réaction catalysée par une enzyme dépend de la concentration du substrat sur lequel elle agit. Pour une enzyme donnée, on note s la concentration du substrat (en millimoles par litre, $s \geqslant 0$) et on modélise la vitesse de la réaction (en micromoles par minute) par $v(s) = \dfrac{10s}{2+s}$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de v dans un repère orthogonal.

1) Calculer $v(0)$, $v(2)$ et $v(8)$.

2) Montrer que, pour tout $s \geqslant 0$, $v'(s) = \dfrac{20}{(2+s)^2}$. En déduire le sens de variation de v sur $[0\,;+\infty[$.

3) On admet que, pour tout $s \geqslant 0$, $v''(s) = \dfrac{-40}{(2+s)^3}$. Étudier la convexité de v sur $[0\,;+\infty[$, puis interpréter : comment évolue le gain de vitesse apporté par une même augmentation de la concentration lorsque s augmente ?

4)

a. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

b. Montrer que, pour tout $s \geqslant 0$, $v(s) - 5s = \dfrac{-5s^2}{2+s}$. En déduire la position de $\mathscr{C}$ par rapport à T. Ce résultat était-il prévisible ?

c. La vitesse de la réaction peut-elle atteindre 10 micromoles par minute ? Justifier.

Exercice 3 — Engrais et rendement d'une parcelle de blé

5 points

Un agronome étudie l'effet de la dose d'engrais azoté sur le rendement d'une parcelle de blé. Pour une dose x, exprimée en centaines de kilogrammes d'azote par hectare, avec $x \in [0\,;4]$, le rendement de la parcelle, en quintaux par hectare, est modélisé par $P(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 40$.

Partie A — Le rendement

1) Calculer $P(0)$ et interpréter ce résultat.

2) Montrer que, pour tout $x \in [0\,;4]$, $P'(x) = -3(x-3)(x+1)$. Dresser le tableau de variations de P sur $[0\,;4]$.

3) Quelle dose d'engrais donne le rendement maximal ? Quel est alors ce rendement ?

Partie B — Le rendement marginal

On appelle **rendement marginal** la fonction P' : le nombre $P'(x)$ mesure le gain de rendement (en quintaux par hectare) procuré par cent kilogrammes d'azote supplémentaires lorsque la dose est voisine de x.

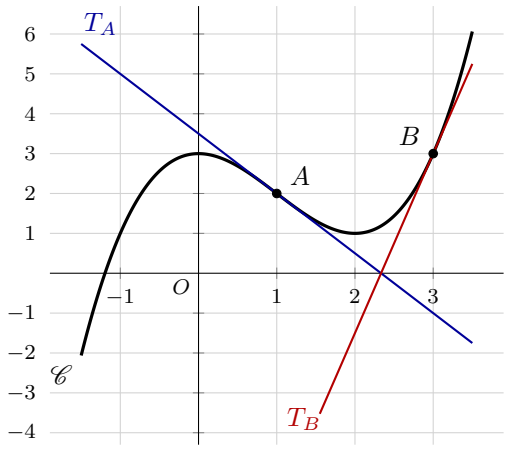
4) Calculer $P''(x)$. Étudier la convexité de P sur $[0\,;4]$ et donner les coordonnées du point d'inflexion de sa courbe.

5) En déduire la dose pour laquelle le rendement marginal est maximal, et la valeur de ce maximum. Décrire en une phrase l'évolution de l'efficacité de l'engrais lorsque la dose augmente de 0 à 300 kg par hectare.

Exercice 4 — Une courbe et ses tangentes

7 points

On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $[-1{,}5\,;3{,}5]$. Sa courbe $\mathscr{C}$ est tracée ci-contre dans un repère orthonormé, ainsi que ses tangentes T_A et T_B aux points A et B d'abscisses respectives 1 et 3.



Partie A — Lectures graphiques

Dans cette partie, aucune justification n'est demandée.

1) Lire $f(0)$, $f(2)$ et $f(3)$.

2) Lire $f'(1)$ et $f'(3)$.

3) Sur quel intervalle f semble-t-elle concave ? convexe ? Que représente le point A pour la courbe $\mathscr{C}$?

4) Conjecturer la position de $\mathscr{C}$ par rapport à T_B sur $[-1{,}5\,;3{,}5]$, puis la position de $\mathscr{C}$ par rapport à T_A.

Partie B — Par le calcul

On admet désormais que, pour tout $x \in [-1{,}5\,;3{,}5]$, $f(x) = 0{,}5x^3 - 1{,}5x^2 + 3$.

5) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$. Étudier le signe de $f''(x)$ sur $[-1{,}5\,;3{,}5]$ et retrouver les résultats conjecturés à la question 3.

6) **a.** Montrer que la tangente T_A a pour équation $y = -1{,}5x + 3{,}5$.

b. Montrer que, pour tout $x \in [-1{,}5\,;3{,}5]$, $f(x) - (-1{,}5x + 3{,}5) = 0{,}5(x-1)^3$. En déduire la position de $\mathscr{C}$ par rapport à T_A.

7) On admet que T_B a pour équation $y = 4{,}5x - 10{,}5$ et que, pour tout réel x, $f(x) - (4{,}5x - 10{,}5) = 0{,}5(x-3)^2(x+3)$. En déduire la position de $\mathscr{C}$ par rapport à T_B sur $[-1{,}5\,;3{,}5]$. Sur quel intervalle la convexité de f permettait-elle de prévoir ce résultat ?

Exercice 5 — Question ouverte

1 point

Une fonction polynôme du second degré peut-elle admettre un point d'inflexion ? Une fonction polynôme du troisième degré en admet-elle toujours un ? Argumenter. *Toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte.*