Exercice 1 — Vrai ou faux ?

8 points

Barème : 1,5 point par affirmation, 2 points pour la 2).

1) VRAI. f est une fonction polynôme, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$ et $f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$.
$f''(x) < 0$ pour $x < 1$ et $f''(x) > 0$ pour $x > 1$: f'' s'annule en 1 **en changeant de signe**, donc f est concave sur $]-\infty\,;1]$, convexe sur $[1\,;+\infty[$, et la courbe admet un point d'inflexion au point d'abscisse 1, de coordonnées $(1\,;\,f(1)) = \boxed{(1\,;\,0)}$.

2) FAUX. g est un produit : $g'(x) = 1\times \mathrm{e}^x + x\,\mathrm{e}^x = (x+1)\mathrm{e}^x$, puis $g''(x) = \mathrm{e}^x + (x+1)\mathrm{e}^x = (x+2)\mathrm{e}^x$. Comme $\mathrm{e}^x > 0$, $g''(x)$ est du signe de $x+2$: négatif pour $x < -2$, positif pour $x > -2$. Le seul point d'inflexion de la courbe a donc pour abscisse $\boxed{-2}$ (et non -1).
En -1, c'est g' qui s'annule : $g''(-1) = \mathrm{e}^{-1} > 0$, donc g admet en -1 un **minimum** ($g(-1) = -\mathrm{e}^{-1} \approx -0{,}37$), pas un point d'inflexion.

3) FAUX. Contre-exemple : $f(x) = x^4$ sur $\mathbb{R}$. On a $f'(x) = 4x^3$ et $f''(x) = 12x^2$, donc $f''(0) = 0$. Mais $f''(x) = 12x^2 \geqslant 0$ pour tout réel x : f'' **ne change pas de signe** en 0, la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$ tout entier et sa courbe n'a aucun point d'inflexion. La condition $f''(a) = 0$ est nécessaire mais pas suffisante : il faut un changement de signe de f''.

4) FAUX. Sur $[-3\,;0]$, la courbe est située **au-dessus** de ses cordes : par exemple la corde joignant les points d'abscisses -3 et 0 (d'ordonnées $-4{,}5$ et 0) passe, en $x = -1{,}5$, par l'ordonnée $-2{,}25$, alors que la courbe y est à environ $0{,}3$. Or une fonction convexe a sa courbe **au-dessous** de ses cordes. Donc h n'est pas convexe sur $[-3\,;3]$; elle est concave sur $[-3\,;0]$ (courbe sous ses tangentes) et convexe sur $[0\,;3]$ seulement.

5) VRAI. Sur $[-3\,;0]$ la courbe est sous ses tangentes (h concave) et sur $[0\,;3]$ elle est au-dessus de ses tangentes (h convexe) : la convexité change en 0. Au point O, la courbe **traverse sa tangente** (qui est la droite d'équation $y = -0{,}75x$) : c'est la caractérisation graphique d'un point d'inflexion.
$\boxed{O \text{ est un point d'inflexion de } \mathscr{C}_h}$.

Exercice 2 — Questionnaire à choix multiples

6 points

1 point par réponse exacte. Les justifications ci-dessous n'étaient pas demandées.

Question	1	2	3	4	5	6
Réponse	**b)**	**b)**	**b)**	**a)**	**c)**	**c)**

1) $f'(x) = 6x^2 - 2x + 5$ puis $f''(x) = \boxed{12x - 2}$: réponse **b)**. (La réponse a) est f', pas f''.)

2) $f'(x) = -2\mathrm{e}^{-2x}$ puis $f''(x) = -2\times(-2)\mathrm{e}^{-2x} = \boxed{4\mathrm{e}^{-2x}}$: réponse **b)**.

3) $f''(x) = (x-3)(x+1)$ est un trinôme de racines -1 et 3, positif à l'extérieur des racines : $f''(x) \geqslant 0$ sur $]-\infty\,;-1]$ et sur $[3\,;+\infty[$, négatif sur $[-1\,;3]$. f est donc convexe sur chacun des intervalles $]-\infty\,;-1]$ et $[3\,;+\infty[$ (et concave sur $[-1\,;3]$) : réponse **b)**.

4) $f''(x) = (x-2)^2 \geqslant 0$ pour tout x : f'' s'annule en 2 mais **sans changer de signe**. La fonction est convexe sur $\mathbb{R}$ et la courbe n'a **aucun** point d'inflexion : réponse **a)**.

5) La courbe Γ (en « cloche ») est convexe à gauche, concave au voisinage de son sommet, puis de nouveau convexe à droite : la convexité change deux fois, en deux points symétriques (abscisses environ $\pm 0{,}7$). Elle admet exactement **deux** points d'inflexion : réponse **c)**.
Remarque : Γ est la courbe de $x \longmapsto 4\mathrm{e}^{-x^2}$, dont la dérivée seconde $8(2x^2-1)\mathrm{e}^{-x^2}$ s'annule en changeant de signe en $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

6) Réponse **c)** : $L(x) = 0{,}5x + 0{,}5x^2$ vérifie $L(0) = 0$, $L(1) = 1$, $L'(x) = 0{,}5 + x > 0$ (croissante) et $L''(x) = 1 > 0$ (convexe).
Les autres ne conviennent pas : a) $L(1) = 2 \neq 1$; b) $L''(x) = -2 < 0$, la fonction est concave ; d) $L(0) = 1$ et la fonction est décroissante.

Exercice 3 — Les salaires d'une entreprise

6 points

1) **a.** Pour $x = 0{,}4$, le tableau donne $y = 0{,}18$: les $40\,\%$ des salariés les moins payés perçoivent $\boxed{18\,\%}$ de la masse salariale.
Les $80\,\%$ les moins payés en perçoivent $63\,\%$, donc les $20\,\%$ les mieux payés perçoivent $1 - 0{,}63 = 0{,}37$, soit $\boxed{37\,\%}$ de la masse salariale.

b. Chaque segment a une « largeur » de $0{,}2$; son coefficient directeur est le quotient de la variation de y par $0{,}2$:

$$\frac{0{,}06}{0{,}2} = 0{,}3\ ; \quad \frac{0{,}18-0{,}06}{0{,}2} = 0{,}6\ ; \quad \frac{0{,}36-0{,}18}{0{,}2} = 0{,}9\ ;$$

$$\frac{0{,}63-0{,}36}{0{,}2} = 1{,}35\ ; \quad \frac{1-0{,}63}{0{,}2} = 1{,}85.$$

Les coefficients directeurs **augmentent** de segment en segment (chaque groupe de 100 salariés perçoit plus que le précédent). Des pentes de sécantes croissantes caractérisent une ligne brisée $\boxed{\text{convexe}}$: la courbe de Lorenz est convexe.

2) $L(0) = 0$ et $L(1) = 0{,}2 + 0{,}5 + 0{,}3 = \boxed{1}$.
$L(0{,}4) = 0{,}2 \times 0{,}4 + 0{,}5 \times 0{,}16 + 0{,}3 \times 0{,}064 = 0{,}08 + 0{,}08 + 0{,}0192 = 0{,}1792 \approx 0{,}18$: en accord avec le tableau.
$L(0{,}5) = 0{,}1 + 0{,}125 + 0{,}0375 = 0{,}2625 \approx \boxed{0{,}26}$: selon le modèle, la moitié des salariés les moins payés perçoit environ $26\,\%$ de la masse salariale (et l'autre moitié environ $74\,\%$).

3) L est une fonction polynôme : $L'(x) = 0{,}2 + x + 0{,}9x^2$ et $\boxed{L''(x) = 1 + 1{,}8x}$.
Pour $x \in [0\,;1]$: $L'(x) \geqslant 0{,}2 > 0$ (somme de termes positifs), donc L est **strictement croissante** ; $L''(x) \geqslant 1 > 0$, donc L est $\boxed{\text{convexe sur } [0\,;1]}$.

4) Développons le membre de droite : $x(1-x)(0{,}8+0{,}3x) = x\left(0{,}8 + 0{,}3x - 0{,}8x - 0{,}3x^2\right) = x\left(0{,}8 - 0{,}5x - 0{,}3x^2\right) = 0{,}8x - 0{,}5x^2 - 0{,}3x^3$.
Or $x - L(x) = x - 0{,}2x - 0{,}5x^2 - 0{,}3x^3 = 0{,}8x - 0{,}5x^2 - 0{,}3x^3$.
D'où $\boxed{x - L(x) = x(1-x)(0{,}8+0{,}3x)}$.

Pour $x \in [0\,;1]$: $x \geqslant 0$, $1 - x \geqslant 0$ et $0{,}8 + 0{,}3x > 0$, donc $x - L(x) \geqslant 0$, c'est-à-dire $L(x) \leqslant x$: la courbe de L est $\boxed{\text{au-dessous de } \Delta}$ (elle la touche seulement en 0 et en 1).
Interprétation : quelle que soit la part x de salariés considérée (les moins payés), ils perçoivent une part de la masse salariale **inférieure** à leur part dans l'effectif : par exemple $50\,\%$ des salariés ne perçoivent que $26\,\%$ de la masse salariale.

5) La tangente au point d'abscisse x_0 est parallèle à Δ si et seulement si son coefficient directeur vaut 1 : $L'(x_0) = 1$.

$$L'(x) = 1 \iff 0{,}9x^2 + x + 0{,}2 = 1 \iff 0{,}9x^2 + x - 0{,}8 = 0.$$

Discriminant : $\Delta' = 1^2 - 4 \times 0{,}9 \times (-0{,}8) = 1 + 2{,}88 = 3{,}88 > 0$. Les solutions sont $x = \dfrac{-1 - \sqrt{3{,}88}}{1{,}8} \approx -1{,}65$ (hors de $[0\,;1]$) et $x = \dfrac{-1 + \sqrt{3{,}88}}{1{,}8} \approx 0{,}539$. Donc $\boxed{x_0 \approx 0{,}54}$.
En ce point, $L(x_0) \approx 0{,}30$ et l'écart vaut $x_0 - L(x_0) \approx 0{,}54 - 0{,}30 = \boxed{0{,}24}$.
Interprétation : c'est pour les $54\,\%$ des salariés les moins payés que le déficit est le plus marqué : ils représentent $54\,\%$ de l'effectif mais ne perçoivent qu'environ $30\,\%$ de la masse salariale, soit un écart maximal de 24 points entre part de l'effectif et part des salaires.