Calculatrice autorisée (mode examen)

Exercice 1 — Vrai ou faux ?

8 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$. La courbe de f admet un point d'inflexion au point d'abscisse 1.

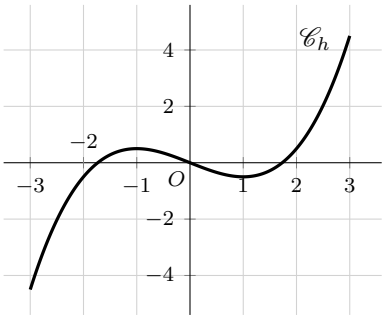
2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\,\mathrm{e}^x$. La courbe de g admet un point d'inflexion au point d'abscisse -1.

3) Si f est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et si $f''(a) = 0$ pour un réel a, alors la courbe de f admet un point d'inflexion au point d'abscisse a.

Les affirmations **4)** et **5)** portent sur une fonction h, définie et deux fois dérivable sur $[-3\,;3]$, dont la courbe $\mathscr{C}_h$ est tracée ci-contre dans un repère orthogonal.

4) La fonction h est convexe sur $[-3\,;3]$.

5) La courbe $\mathscr{C}_h$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse 0.



Exercice 2 — Questionnaire à choix multiples

6 points

Pour chaque question, une seule des réponses proposées est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. **Aucune justification n'est demandée.** Une réponse fausse ou une absence de réponse ne retire aucun point.

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 1$. Pour tout réel x, $f''(x)$ est égal à :

a) $6x^2 - 2x + 5$ **b)** $12x - 2$ **c)** $12x$ **d)** 12

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$. Pour tout réel x, $f''(x)$ est égal à :

a) $-2\mathrm{e}^{-2x}$ **b)** $4\mathrm{e}^{-2x}$ **c)** $-4\mathrm{e}^{-2x}$ **d)** e^{-2x}

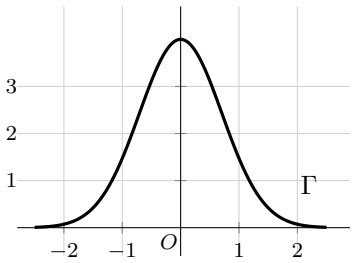
3) Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, $f''(x) = (x-3)(x+1)$. La fonction f est convexe :

a) sur $[-1\,;3]$
b) sur $]-\infty\,;-1]$ et sur $[3\,;+\infty[$
c) sur $\mathbb{R}$ tout entier
d) sur $[3\,;+\infty[$ seulement

4) Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, $f''(x) = (x-2)^2$. Le nombre de points d'inflexion de la courbe de f est :

a) 0 **b)** 1 **c)** 2

5) Le nombre de points d'inflexion de la courbe Γ tracée ci-contre est :



a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3

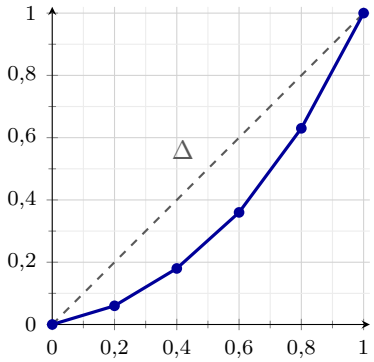
6) Une courbe de Lorenz est la courbe d'une fonction L continue, croissante et convexe sur $[0\,;1]$, telle que $L(0) = 0$ et $L(1) = 1$. Parmi les expressions suivantes de $L(x)$, pour $x \in [0\,;1]$, la seule qui peut définir une courbe de Lorenz est :

a) $x^2 + x$ **b)** $2x - x^2$ **c)** $0{,}5x + 0{,}5x^2$ **d)** $1 - x$

Exercice 3 — Les salaires d'une entreprise

6 points

Dans une entreprise de 500 salariés, on classe les salariés par salaire annuel croissant et on les partage en cinq groupes de 100 personnes. Le tableau ci-dessous donne, pour chaque part cumulée x des salariés (les moins payés), la part cumulée y de la masse salariale totale qu'ils perçoivent.
La ligne brisée qui joint les points de coordonnées $(x\,;\,y)$ est la **courbe de Lorenz** de cette répartition (figure ci-contre). La droite Δ d'équation $y = x$ correspond à une répartition parfaitement égalitaire : plus la courbe de Lorenz s'en éloigne, plus la répartition est inégale.



x (part cumulée des salariés)	0	$0{,}2$	$0{,}4$	$0{,}6$	$0{,}8$	1
y (part cumulée de la masse salariale)	0	$0{,}06$	$0{,}18$	$0{,}36$	$0{,}63$	1

1) **a.** Quelle part de la masse salariale perçoivent les $40\,\%$ des salariés les moins payés ? Et les $20\,\%$ les mieux payés ?

b. Calculer les coefficients directeurs des cinq segments de la ligne brisée. Que remarque-t-on ? Quelle propriété graphique de la courbe de Lorenz cela traduit-il ?

2) On modélise cette courbe par la fonction L définie sur $[0\,;1]$ par $L(x) = 0{,}2x + 0{,}5x^2 + 0{,}3x^3$. Vérifier que $L(0) = 0$, $L(1) = 1$ et que $L(0{,}4)$ est en accord avec le tableau. Calculer $L(0{,}5)$ (arrondir au centième) et interpréter ce résultat.

3) Calculer $L'(x)$ et $L''(x)$. En déduire que L est croissante et convexe sur $[0\,;1]$.

4) Montrer que, pour tout $x \in [0\,;1]$, $x - L(x) = x(1-x)(0{,}8 + 0{,}3x)$. En déduire la position de la courbe de L par rapport à la droite Δ, puis interpréter dans le contexte.

5) On note x_0 l'abscisse du point de la courbe de L en lequel la tangente est parallèle à Δ. Déterminer x_0 (arrondir au centième). On admet que l'écart $x - L(x)$ est maximal pour $x = x_0$: interpréter dans le contexte, en donnant la valeur de cet écart arrondie au centième.